TRAVAIL D'ETE DEUXIEME ANNEE ECS - MATHEMATIQUES

Vous venez de terminer votre première année et allez rentrer dans votre deuxième année de classe préparatoire aux grandes écoles de commerce.

La deuxième année est une année très courte et très intense. Aussi, vous ne pourrez l'aborder sereinement sans un travail d'été conséquent. Il est important que vous partiez avec des bases solides.

Durant les premières semaines de juillet, reprenez vos cours de Mathématiques de première année (définitions, théorèmes avec leurs hypothèses, etc…)., vos devoirs (devoirs surveillés, devoirs maison) et vos exercices.

Pour votre rentrée en deuxième année, vous devez revoir et approfondir toutes les notions suivantes :

Analyse : Récurrence, fonctions (continuité, dérivabilité, limites, équivalents), suites, séries, intégrales sur un segment. Nous reprendrons en deuxième année les intégrales impropres.

Algèbre : Complexes, polynômes, matrices, espaces vectoriels et applications linéaires. La diagonalisation sera vue en deuxième année.

Probabilité : Dénombrement et variables aléatoires discrètes. Nous reprendrons les variables à densité en deuxième année.

Pour vous entraîner, je vous propose des exercices, que vous devez absolument maîtriser avant votre entrée en deuxième année. Vous avez le corrigé pour pouvoir travailler.

Un devoir surveillé comportant des exercices tirés de ce travail ou des exercices similaires est prévu la semaine de la rentrée.

EXERCICE 5.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
2. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4, puis conjecturer une formule générale donnant u_n en fonction de n.
3. Prouver la conjecture de la question précédente.

EXERCICE 6.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $a_n = (1+2\sqrt{2})^n + (1-2\sqrt{2})^n$.

1. Vérifier que : $\forall n \geqslant 1,\ a_{n+1} - 7a_{n-1} = 2a_n$.
2. En déduire que a_n est un entier, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 6.2

On considère la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations :

$$v_0 = 1,\ v_1 = 1,\ v_2 = 9 \ \text{ et }\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+3} = 3v_{n+2} - 4v_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n2^n + (-1)^n$.

EXERCICE 10.1

Démontrer que, pour tous entiers k, p, n tels que $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$, on a :

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

EXERCICE 10.2

Soit p un entier naturel fixé.
Démontrer par récurrence sur m que : $\forall m \geqslant p,\ \displaystyle\sum_{n=p}^{m}\binom{n}{p} = \binom{m+1}{p+1}$.

EXERCICE 11.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} k^2$
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{9}(1-2k^3)$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k+n)$
- $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{3n}\left(-\frac{1}{2}\right)^i$
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n+1}\frac{2^{2j}}{3^{j+1}}$
- $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n+1}\frac{5^k+3^{k+2}}{5^{k+1}}$

EXERCICE 11.2

Pour tout réel x, pour tout entier naturel non nul n, on note : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Écrire $f_n(x)$ en fonction de n et de x sans le symbole $\sum$.
2. En dérivant f_n, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

3. Application : simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} k2^k$.

EXERCICE 13.1

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

1. $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$
2. $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$
3. $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$
4. $D_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

EXERCICE 15.1

Soit n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

1. $D_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|$
3. $T_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)$

EXERCICE 17.1

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 1 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases}$$

EXERCICE 17.2

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 2z = 0 \\ 3x + 3y - z = -2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y + t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2y - z + t = 0 \\ 2x + z + t = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 21.1 Pour tout entier naturel non nul n, on note :

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik^3} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i\frac{k\pi}{n}}$$

1 Montrer que S_n est réel.

2 Montrer que T_n est imaginaire pur.

EXERCICE 22.1 Pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel x, on note :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \quad \text{et} \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

1 Déterminer une expression simple de $S_n(x) + iT_n(x)$.

2 En déduire les valeurs de $S_n(x)$ et $T_n(x)$.

EXERCICE 31.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 31.2 Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 Calculer J^2 et exprimer le résultat en fonction de J.

2 En déduire l'expression de J^k en fonction de J, pour tout entier naturel non nul k.

3 Exprimer A en fonction de I_3 et J et en déduire A^n pour tout entier naturel n.

4 Cas général : soit p un entier naturel non nul, soit α et β des scalaires et soit J_p la matrice carrée d'ordre p dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Calculer $(\alpha I_p + \beta J_p)^n$ pour tout entier naturel n.

EXERCICE 32.1 Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$.

1 Vérifier que $P = X^2 - 6X + 9$ est un polynôme annulateur de A.

2 Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P, puis expliciter A^n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 32.2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = X^3 + X^2 - 4X - 4$.

1 Vérifier que $P(A) = O_3$.

2 Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P, puis exprimer A^n en fonction de A^2, A et I_3, pour tout entier naturel n.

3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente linéaire d'ordre 3 à coefficients constants de premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$ et vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n$$

Déterminer le terme général de la suite (u_n).

EXERCICE 34.2

Étudier l'inversibilité des matrices suivantes, les inverser le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 34.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1 Calculer $A^3 - 4A^2 - 9A$.

2 Montrer qu'il existe une matrice non nulle B carrée d'ordre 3 telle que $AB = O_3$.

3 En déduire que A n'est pas inversible.

EXERCICE 35.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Étudier l'inversibilité de A, B et T et calculer leur inverse le cas échéant.

Exercice 36.1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 7/3, \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1. \end{cases}$

Exprimer u_n en fonction de n puis calculer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 37.1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = \sqrt{2}/10, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}u_{n+1} - \dfrac{1}{25}u_n. \end{cases}$

Exprimer u_n en fonction de n puis calculer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 37.2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 15$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{5n+15}{2n+4}u_{n+1} + \frac{3n+9}{2n+2}u_n$$

1. On note : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$.
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
2. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
4. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 38.1

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de :

1. $\ln(n+1) - \ln(n)$
2. $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$
3. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$
4. $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$
5. $\dfrac{n! + n^{2019}}{\sqrt{n} + 2018^n}$
6. $n\left(\sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} - n\right)$

Exercice 38.2

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de :

1. $n^{\frac{1}{\ln(n)}}$
2. $(1+2^n)^{\frac{1}{n}}$
3. $(1+\dfrac{1}{n})^n$

Exercice 40.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

1. En étudiant les variations de la fonction $g : x \mapsto e^x - x - 1$, établir : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors nécessairement $\ell = 0$.
4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 42.1

Calculer les limites suivantes :

1. $\sqrt{x^2+1} + x$ en $-\infty$.
2. $\frac{\ln(x)-x}{\ln(x)-1}$ en $+\infty$ et 0^+.
3. $\frac{\ln(3x+1)}{x}$ en $+\infty$ et 0.
4. $x^3 e^x$ en $-\infty$.
5. $x^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.
6. $\frac{e^{2x}-1}{x}$ en 0.
7. $\frac{\tan(x)}{x}$ en 0.
8. $\frac{\cos(x)}{x^2}$ en $+\infty$.

Exercice 43.1

Soit f et g les fonctions définies respectivement sur $[0,1[$ et sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(x)} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité en 0 des fonctions f et g.
La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Exercice 43.2

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \cos(3x) & \text{si } x < 0 \\ 1 - \sin(2x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?

Exercice 43.3

Soit α un réel. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f_α, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln(x)$, soit prolongeable par continuité en 0.

Exercice 44.1

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = |x^3|$$

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions f et g.

Exercice 44.2

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^3 + x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \cos(3x) & \text{si } x < 0 \\ 1 - \sin(2x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1 Vérifier que f est continue en 1. Est-elle dérivable en 1 ?

2 On a vu dans la fiche 43 que g est continue en 0. Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 44.3

Soit α un réel. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f_α, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln(x)$ si $x > 0$ et $f_\alpha(0) = 0$, soit dérivable à droite en 0.

Exercice 50.1

On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \ln(2 + x^2)$.

1 Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à préciser.

2 Expliciter la fonction réciproque de f.

Exercice 52.1

Soit $n \geqslant 3$. On considère la fonction f_n définie par : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f_n(x) = x - n\ln(x)$

1 Soit $n \geqslant 3$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n sur $]0, +\infty[$ telles que : $0 < u_n < n < v_n$.

2 Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \geqslant 3}$.

3 Prouver que : $\forall n \geqslant 3,\ 1 < u_n < e$.

4 Vérifier que $f_{n+1}(u_n) = -\ln(u_n)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante.

5 Prouver que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est convergente.

6 Prouver que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$.

Exercice 52.2

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
Une démonstration par récurrence (comme celle de la question 1 de l'exercice 39.1) permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 0$.
On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$.

1 Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et calculer α.

2 Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

3 À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

4 En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |1 - \alpha|$.

5 Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 56.1

Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer :

$$\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^{\pi/4} \tan(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_{-2}^2 |x+1|\,\mathrm{d}x$$

Exercice 56.2

1 Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right],\ \dfrac{2(1-t)}{(2t-1)^2} = \dfrac{a}{(2t-1)^2} + \dfrac{b}{2t-1}$.

2 Calculer $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{2(1-t)}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 57.1

Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer :

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad J = \int_0^{\pi/2} \cos(x) e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 58.1

Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer à l'aide des changements de variable respectifs $u = 2t - 1$ et $u = \cos(t)$:

$$\int_0^{1/4} \frac{2(1-t)}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{2 - \sin^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 59.1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2 \big(\ln(x)\big)^n\,\mathrm{d}x$.

1 Calculer I_0 et I_1.

2 Vérifier que : $\forall x \in [1, e],\ 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{x}{e}$.
En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ainsi que la valeur de sa limite.

3 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3I_{n+1} = e^3 - (n+1)I_n$.

4 En déduire la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 60.1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(t) = \ln(t)$.
Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en e.

Exercice 60.2

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t-1}{e^t+1}\,dt$.

1. Étudier les variations de F.
2. Prouver que : $\forall t \in [1, +\infty[,\ \dfrac{t-1}{e^t+1} \leqslant te^{-t}$.
   En déduire que la fonction F est majorée sur $[1, +\infty[$.
   Que peut-on en déduire quant à la limite de F en $+\infty$?
3. Prouver que : $\forall t \in]-\infty, 1],\ \dfrac{t-1}{e^t+1} \leqslant \dfrac{t-1}{e+1}$. En déduire la limite de F en $-\infty$.

Exercice 61.1

On considère la fonction G définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^4+1}\,dt$.

1. Vérifier que G est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que G est une fonction impaire.
3. Étudier les variations de G sur $[0, +\infty[$.
4. Prouver que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \dfrac{x}{16x^4+1} \leqslant G(x) \leqslant \dfrac{x}{x^4+1}$.
5. En déduire la limite de G en $+\infty$, puis en $-\infty$.

Exercice 61.2

Prouver la convergence des suites suivantes et calculer leur limite :

1. $S_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$
2. $T_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}$

Exercice 63.1

Dans une classe de 42 étudiants, 15 étudiants se portent volontaires pour constituer une équipe d'ultimate. Il s'agit de 8 garçons et de 7 filles. Une équipe d'ultimate est constituée de 8 joueurs.

1. Combien d'équipes peut-on former avec les volontaires ?
2. Combien peut-on former d'équipes mixtes (c'est-à-dire comportant au moins un garçon et au moins une fille) ?
3. Combien peut-on former d'équipes paritaires (c'est-à-dire comportant autant de garçons que de filles) ?

Exercice 63.2

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue un tirage simultané de deux boules de cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages donnent une paire, c'est-à-dire deux numéros identiques ?
   En déduire la probabilité de constituer une paire.

Exercice 64.1

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On effectue 5 tirages d'une boule sans remise dans l'urne.

1. Combien y a-t-il de résultats différents ?
2. Combien de résultats donnent exactement 3 boules à numéro pair ?
3. Combien de résultats donnent des numéros obtenus dans l'ordre croissant ?

Exercice 64.2

Soit n et p des entiers naturels non nuls. Une application de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ est caractérisée par la donnée des n images (éléments de $[\![1, p]\!]$) des éléments de $[\![1, n]\!]$. On peut la modéliser par une n-liste de l'ensemble $[\![1, p]\!]$.

1. Combien y a-t-il d'applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$?
2. Combien y a-t-il d'applications injectives de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$?
3. Combien y a-t-il d'applications bijectives de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$?

Exercice 67.1

On considère l'expérience aléatoire consistant à effectuer n tirages avec remise (avec $n \geqslant 4$) dans une urne contenant 1 boule noire et 2 boules rouges.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - C : « On obtient la même couleur au premier et au dernier tirage ».
   - D : « Les tirages amènent au moins une boule rouge ».
2. On considère les événements suivants :
   - F : « Les tirages 1 et 2 amènent chacun une boule noire ».
   - G : « Les tirages 2 et 3 amènent chacun une boule noire ».
   - H : « Les tirages 3 et 4 amènent chacun une boule rouge ».

   Calculer la probabilité que l'un au moins de ces trois événements soit réalisé.

EXERCICE 68.1

On dispose de n urnes ($n \geqslant 2$) notée $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$.
Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, l'urne $\mathcal{U}_k$ contient k boules rouges et $n+1-k$ boules noires.
On choisit une urne au hasard, puis on y pioche une boule.

1 Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?

2 On constate que la boule tirée est rouge.
Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne $\mathcal{U}_k$?

EXERCICE 68.2

On dispose de deux pièces A et B : la pièce A est équilibrée, alors que la pièce B amène Pile avec la probabilité $1/3$.
On effectue une suite illimitée de lancers selon le protocole suivant :

On commence par lancer la pièce A.
Pour tout $n \geqslant 1$, si le n-ième lancer amène Pile, on relance la même pièce au $(n+1)$-ième lancer. Sinon, on lance l'autre pièce au $(n+1)$-ième lancer.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n : « On lance la pièce A au n-ième lancer » et $a_n = P(A_n)$.

1 Que valent a_1 et a_2 ?

2 À l'aide du système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\ \ a_{n+1} = -\frac{1}{6}\,a_n + \frac{2}{3}$$

Vérifier que la formule reste valable pour $n = 1$.

3 En déduire l'expression de a_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$.

EXERCICE 69.1

On dispose d'une urne contenant une boule blanche et n boules rouges (avec $n \geqslant 1$).
On effectue des tirages successifs d'une boule sans remise dans cette urne jusqu'à avoir vidé l'urne.
On note X le nombre de boules rouges obtenues avant l'apparition de la boule blanche.
Déterminer la loi de X.

EXERCICE 69.2

Soit k et n deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.
On tire simultanément k boules d'une urne qui contient n boules blanches et n boules noires.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches ainsi obtenues.

1 Déterminer la loi de X.

2 En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k}$.

EXERCICE 71.1

On dispose d'une urne contenant une boule blanche et n boules rouges (avec $n \geqslant 1$).
On effectue des tirages successifs d'une boule sans remise dans cette urne jusqu'à avoir vidé l'urne. Soit X le nombre de boules rouges obtenues avant l'apparition de la boule blanche.
On a vu dans la fiche 69 que la loi de X est donnée par :

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n+1}$$

On a vu de plus dans la fiche 70 que $E(X) = \dfrac{n}{2}$.
Calculer la variance de X.

EXERCICE 71.2

On tire simultanément 3 boules d'une urne qui contient 4 boules blanches et 4 boules noires.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches et Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires obtenues lors de ce tirage.
La loi de X a été explicitée dans la fiche 70 :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$1/14$	$6/14$	$6/14$	$1/14$

De plus on a vu que $E(X) = \dfrac{3}{2}$.

1 Calculer la variance de X.

2 On gagne 1 point pour chaque boule blanche obtenue et on perd 1 point pour chaque boule noire obtenue. Soit G la variable aléatoire donnant le nombre de points obtenus.

a. Exprimer G en fonction de X et de Y.

b. Que vaut $X + Y$? En déduire G uniquement en fonction de X.

c. Donner l'espérance et la variance de G.
Pouvait-on s'attendre à la valeur obtenue pour l'espérance de G ?

EXERCICE 74.1

On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y - 3z = 0\}$.

1 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2 Donner un élément non nul de F, ainsi qu'un élément de $\mathbb{R}^3$ qui n'appartient pas à F.

EXERCICE 74.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n et $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n :

$$\mathcal{S}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = -M\}$$

Prouver que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 74.3

On considère l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = P'(1) = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 74.4

On note $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ à dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$.
On considère l'ensemble $F = \left\{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 84.1

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1 $u_n = \ln(n+1)$ 2 $v_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin(n) + \ln(n)}$ 3 $w_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

EXERCICE 84.2

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_1^e x^2\big(\ln(x)\big)^n \,\mathrm{d}x$.

On a vu dans l'exercice 59.1 que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3I_{n+1} = e^3 - (n+1)I_n$.

Trouver un équivalent simple de (I_n).

EXERCICE 84.3

On considère la suite implicite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ où pour tout entier $n \geqslant 3$, u_n est l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in]0, e[$ suivante : $x - n\ln(x) = 0$.
On a vu dans l'exercice 52.1 que la suite (u_n) est bien définie et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
Trouver un équivalent simple de $(u_n - 1)$.

EXERCICE 86.1

1 Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{1 + x^2}$.

2 Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g(x) = \sqrt{1 - x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

3 Démontrer que : $n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{3n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

EXERCICE 86.2

1 Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x - x^3}$.

2 Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $g(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2 + x^3}$.

376

EXERCICE 88.1

Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ en se ramenant à une somme télescopique.

EXERCICE 88.2

On admet le théorème suivant :
Soit (u_n) une suite réelle telle que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors la suite (u_n) converge aussi vers ℓ.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1 Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

2 En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

EXERCICE 89.1

Soit $x \in \mathbb{R}$. Prouver la convergence des séries suivantes et calculer leur somme :

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{3k^2 + k}{5^k} \quad ; \quad \sum_{k\geqslant 1} \frac{k(k+1)x^k}{k!}$$

EXERCICE 90.1

1 Montrer que : $\forall k \geqslant 1,\ \dfrac{1}{k2^k} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

2 En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k2^k}$ converge et que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} \leqslant 1$.

EXERCICE 90.2

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{k!}\right) \quad ; \quad \sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{k^2} \quad ; \quad \sum_{k\geqslant 1} \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{k^{1/4}}\right)\right)$$

EXERCICE 91.2

Pour $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n)$.

1 Montrer que : $u_{k-1} - u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2k^2}$.

2 En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} (u_{k-1} - u_k)$.

3 Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

EXERCICE 92.1

Étudier la nature des intégrales suivantes et en donner la valeur en cas de convergence :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \quad ; \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2+x^2}\,dx \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx$$

EXERCICE 93.1

Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{t}\,dt \quad ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

EXERCICE [illegible]

On dispose d'une grille infinie dont les lignes sont numérotées 0, 1, 2, ... et les colonnes sont numérotées 0, 1, 2, ... On place un jeton au hasard sur cette grille et on note $A_{i,k}$: « Le jeton est placé en ligne i et colonne k ».
On suppose que l'on a :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \forall j \in \mathbb{N},\ P(A_{i,k}) = \frac{1}{e\,2^{k+1}\,i!}$$

1 Soit $i \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité de L_i : « Le jeton est placé sur la ligne i ».

2 Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité de C_k : « Le jeton est placé sur la colonne k ».

3 Calculer la probabilité de D : « Le jeton est placé sur la diagonale de la grille, c'est-à-dire sur une case dont la ligne et la colonne portent le même numéro ».

EXERCICE 95.2

Un joueur dispose initialement de 2 euros et joue au jeu suivant : le joueur lance indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée, perd 1 euro pour chaque Pile obtenu et gagne un bonbon pour chaque Face obtenu. Lorsque la cagnotte du joueur arrive à 0 euro, on admet que le joueur continue de jouer, mais qu'il ne perd plus d'argent et ne gagne plus de bonbon.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire donnant le nombre de Piles obtenus lors des k premiers lancers.

1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X_k.

2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de A_k : « Le joueur a encore 2 euros à l'issue du k-ième lancer ».

3 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de B_k : « Le joueur a encore 1 euro à l'issue du k-ième lancer ».

4 **a.** Soit $k \geqslant 2$. Calculer la probabilité de R_k : « Le joueur a 0 euro à l'issue du k-ième lancer ».

b. En déduire la probabilité de R : « Le joueur finit ruiné ».

EXERCICE 97.1

On dispose d'une urne contenant initialement 1 boule blanche et 1 boule rouge.
On effectue une succession illimitée de tirages d'une boule dans cette urne, en ajoutant après chaque tirage une boule supplémentaire de la couleur tirée.
On a vu dans la fiche 96 que l'on obtient presque sûrement une boule rouge lors de la suite de tirages. On note X la variable aléatoire donnant le numéro du tirage amenant la première boule rouge.

1 Déterminer la loi de X.

2 La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, en préciser la valeur.

Exercice 97.2

On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \frac{k-1}{k!}$$

1 Justifier que l'on définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

2 La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, en préciser la valeur.

3 La variable X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer

Exercice 98.1

On effectue une suite illimitée de lancers indépendants d'une pièce amenant Pile avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$). On pose $q = 1 - p$.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de Faces obtenus avant le premier Pile.
On a vu dans la fiche 97 que la loi de X est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = pq^k$.
On rappelle aussi que X admet une espérance, de valeur $E(X) = \frac{q}{p}$.

1 Justifier que X admet un moment d'ordre 2 dont on précisera la valeur.

2 En déduire l'existence et la valeur de la variance de X.

Exercice 99.1

On effectue une suite illimitée de lancers indépendants d'une pièce amenant Pile avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$). On pose $q = 1 - p$.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de Faces obtenus avant le premier Pile.
On a vu dans la fiche 75 que la loi de X est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = pq^k$.

1 Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y = X + 1$.

2 En déduire que X admet une espérance et une variance, que l'on précisera.

Exercice 99.2

On dispose de deux pièces : la pièce 1 amène Pile avec la probabilité $1/2$, tandis que la pièce 2 amène Pile avec la probabilité $1/3$.

1 Dans cette question, on effectue une suite illimitée de lancers de la pièce 1.
On note Y_1 la variable aléatoire donnant le rang du premier Face lors de cette suite de lancers.
Reconnaître la loi de Y_1 puis donner les valeurs de $E(Y_1)$ et $V(Y_1)$.

2 Reconnaître de même la loi de la variable aléatoire Y_2 donnant le rang du premier Face lors d'une suite illimitée de lancers de la pièce 2.
Préciser les valeurs de $E(Y_2)$ et $V(Y_2)$.

3 Dans cette question, on suppose qu'au départ on choisit au hasard et de manière équiprobable l'une des deux pièces. On effectue alors une suite illimitée de lancers de la pièce choisie et on note X le rang du premier Face obtenu lors de cette suite de lancers.
Déterminer la loi de X.

Exercice 100.1

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \dfrac{k-1}{k!}$.

Si X prend la valeur k, on place k boules blanches et 1 boule rouge indiscernables au toucher dans une urne, puis on tire une boule de cette urne.
Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

Exercice 100.2

Un jeton se déplace sur un triangle $A_1A_2A_3$ en suivant le protocole suivant :

- Au départ (instant 0) le jeton est sur le sommet A_1.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si le jeton est sur un certain sommet à l'instant n, il y sera encore à l'instant $n+1$ avec la probabilité $1/2$ ou il se sera déplacé vers l'un des deux autres sommets avec la probabilité $1/4$ pour chacun des sommets.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire donnant le numéro du sommet sur lequel se trouve le jeton à l'instant n.

1 Donner la loi de X_0 et la loi de X_1.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = P(X_n = 1)$, $v_n = P(X_n = 2)$ et $w_n = P(X_n = 3)$.
Vérifier que pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}w_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}w_n \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}w_n \end{cases}$$

3 Que vaut $u_n + v_n + w_n$? En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{4}$.

4 Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

5 Déterminer de même les expressions de v_n et w_n en fonction de n.
Qu'observe-t-on ? Pouvait-on s'y attendre ?

Exercice 104.1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

1 Prouver que f est une densité de probabilité.

2 On note X une variable aléatoire admettant f pour densité.
Calculer la fonction de répartition de X.

Exercice 104.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-2|x|}$.

1 Prouver que f est une densité de probabilité.

2 On note X une variable aléatoire admettant f pour densité.
Calculer la fonction de répartition de X en distinguant les cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$.

EXERCICE 105.1

1 Soit X une variable aléatoire admettant pour densité (voir la fiche 104) la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Étudier l'existence de l'espérance de X et en préciser la valeur le cas échéant.

2 Même question avec la densité définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

3 Même question avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-2|x|}$.

EXERCICE 108.1

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}_2[X]$, dire si les familles suivantes sont des bases de E :

1 $\mathcal{B}_1 = \left(1, X+1, X^2-1, X^2+X+1\right)$.

2 $\mathcal{B}_2 = \left(X^2-1, X^2+1, X^2\right)$.

3 $\mathcal{B}_3 = \left(X^2+1, X-2, 3\right)$.

EXERCICE 111.1

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ x+2y = x-z = 0 \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ x+y+t = y+2t = 0 \right\}$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ x+y+t = y-t = 0 \right\}$$

1 F et G sont-ils en somme directe ?

2 F et H sont-ils en somme directe ?

EXERCICE 115.1

Soit n et p des entiers naturels non nuls et soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On considère l'application Φ définie par :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

1 Montrer que Φ est une application linéaire.

2 Appliquer ce résultat à l'application f étudiée dans l'exemple précédent.

EXERCICE 115.2

Étudier la linéarité des applications suivantes :

1 $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+\mathrm{i}y, 2y+z) \end{array}$

2 $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$

3 $p : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(M + {}^tM) \end{array}$

4 $T : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f + 2f' \end{array}$

où $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 116.1

Lorsque c'est possible, déterminer une base du noyau des applications linéaires suivantes, puis conclure quant à leur injectivité.

1 $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+\mathrm{i}y, 2y+z) \end{array}$

2 $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$

EXERCICE 116.2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère l'application linéaire :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(M + {}^tM) \end{array}$$

Reconnaître le noyau de p. L'application p est-elle injective ?

Exercice 117.1

Déterminer une base de l'image, préciser le rang et tester la surjectivité des applications linéaires suivantes :

1 $$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+\mathrm{i}y, 2y+z) \end{array}$$

2 $$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(0), P(1), P(2)\big) \end{array}$$

Exercice 117.2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère l'application linéaire :

$$p : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) \end{array}$$

1 Montrer que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices symétriques à coefficients réels.

2 Montrer finalement que $\mathrm{Im}(p) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 122.1

Soit l'endomorphisme :

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+2z, -x+2y+z, -x+y+3z) \end{array}$$

1 Déterminer la matrice de h dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

2 Déterminer la matrice de h dans la base $\mathcal{F} = (e_3, e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^3$.

3 Montrer que $\mathcal{B} = \big((1,1,0), (1,0,1), (1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 122.2

Soit l'application linéaire :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Déterminer la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_2[X]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2 Montrer que $\mathcal{B}_1 = \big(1, 2X-1, X^2-2X+1\big)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

Montrer que $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Déterminer alors la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Exercice 123.1

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 123.2

Étudier l'inversibilité des matrices suivantes. On ne demande pas de les inverser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5.2

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: u_n existe et $u_n > 0$.

D'après l'énoncé, $u_0 = 1 > 0$, donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour un entier $n \geqslant 0$ fixé.
Démontrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$.
Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 0$.
On en déduit que $1 + u_n > 0$, donc $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ existe (dénominateur non nul).
De plus comme $u_n > 0$ et comme $1 + u_n > 0$, on a : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} > 0$.
Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Attention, dans l'hérédité il faut prouver d'abord que u_{n+1} existe, et seulement ensuite que $u_{n+1} > 0$.

2 On a : $u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Puis : $u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$.

On trouve de même que $u_3 = \frac{1}{4}$ puis que $u_4 = \frac{1}{5}$.

On conjecture donc que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1}$.

Attention, une conjecture est une propriété que l'on devine à l'aide de cas particuliers ; il faut ensuite prouver par un raisonnement mathématique rigoureux que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: $u_n = \frac{1}{n+1}$.

D'après l'énoncé, $u_0 = 1 = \frac{1}{0+1}$, donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour un entier $n \geqslant 0$ fixé.
Démontrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \frac{1}{n+2}$.
Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = \frac{1}{n+1}$.
Par définition de la suite (u_n), on obtient :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{n+2}$$

Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

EXERCICE 6.1

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
& a_{n+1} - 7a_{n-1} \\
= \ & (1+2\sqrt{2})^{n+1} + (1-2\sqrt{2})^{n+1} - 7(1-2\sqrt{2})^{n-1} - 7(1+2\sqrt{2})^{n-1} \\
= \ & (1+2\sqrt{2})^{n-1}\big[(1+2\sqrt{2})^2 - 7\big] + (1-2\sqrt{2})^{n-1}\big[(1-2\sqrt{2})^2 - 7\big] \\
= \ & (1+2\sqrt{2})^{n-1}\big[(1+4\sqrt{2}+8) - 7\big] + (1-2\sqrt{2})^{n-1}\big[(1-4\sqrt{2}+8) - 7\big] \\
= \ & 2(1+2\sqrt{2})^{n-1}(1+2\sqrt{2}) + 2(1-2\sqrt{2})^{n-1}(1-2\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Finalement : $a_{n+1} - 7a_{n-1} = 2\big[(1+2\sqrt{2})^n + (1-2\sqrt{2})^n\big] = 2a_n$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: a_n est un entier.

On calcule : $a_0 = (1+2\sqrt{2})^0 + (1-2\sqrt{2})^0 = 1 + 1 = 2$, donc a_0 est un entier.
De plus : $a_1 = (1+2\sqrt{2})^1 + (1-2\sqrt{2})^1 = 1 + 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} = 2$, donc a_1 est aussi un entier.
Ainsi $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies.

On suppose que $\mathcal{H}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_n$ sont vraies pour un entier $n \geqslant 1$ fixé.
Démontrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que : a_{n+1} est un entier.
D'après la question précédente, on a : $a_{n+1} = 2a_n + 7a_{n-1}$.
Or par hypothèse de récurrence, a_n et a_{n-1} sont des entiers.
Un produit ou une somme d'entiers est encore un entier.
On en déduit que a_{n+1} est un entier.
Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

EXERCICE 6.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: $v_n = n2^n + (-1)^n$.

$v_0 = 1$ et on calcule : $0 \times 2^0 + (-1)^0 = 0 + 1 = 1$. Ainsi $\mathcal{H}_0$ est vraie.
$v_1 = 1$ et on calcule : $1 \times 2^1 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$. Ainsi $\mathcal{H}_1$ est vraie.
$v_2 = 9$ et on calcule : $2 \times 2^2 + (-1)^2 = 2 \times 4 + 1 = 9$. Ainsi $\mathcal{H}_2$ est vraie.

On suppose que $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}_{n+1}$ et $\mathcal{H}_{n+2}$ sont vraies pour un entier $n \geqslant 0$ fixé.
Démontrons que $\mathcal{H}_{n+3}$ est vraie, c'est-à-dire que : $v_{n+3} = (n+3)2^{n+3} + (-1)^{n+3}$.
Par définition de la suite (v_n), on a : $v_{n+3} = 3v_{n+2} - 4v_n$.
Par hypothèse de récurrence, on a :

$$v_{n+2} = (n+2)2^{n+2} + (-1)^{n+2} \quad \text{et} \quad v_n = n2^n + (-1)^n$$

Comme $(-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n \times 1 = (-1)^n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
v_{n+3} &= 3\times(n+2)2^{n+2} + 3\times(-1)^{n+2} - 4\times n2^{n} - 4\times(-1)^{n}\\
&= 3(n+2)2^{n+2} + 3(-1)^{n+2} - n2^{n+2} - 4\times(-1)^{n+2}\\
&= \big(3(n+2)-n\big)2^{n+2} - (-1)^{n+2}\\
&= (2n+6)2^{n+2} + (-1)^{n+3}\\
&= (n+3)2^{n+3} + (-1)^{n+3}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{H}_{n+3}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

EXERCICE 10.1

On a $k \leqslant p \leqslant n$, donc $0 \leqslant p-k \leqslant n-k$ et on peut écrire :

$$\binom{n-k}{p-k} = \frac{(n-k)!}{(p-k)!\,((n-k)-(p-k))!} = \frac{(n-k)!}{(p-k)!\,(n-p)!}$$

Par ailleurs les autres coefficients binomiaux peuvent aussi s'écrire à l'aide de factorielles.
On a :

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!\,(n-p)!} = \frac{n!}{k!\,(p-k)!\,(n-p)!}$$

et :

$$\binom{p}{k}\binom{n}{p} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!} \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{k!\,(p-k)!\,(n-p)!}$$

On a donc bien montré que : $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

EXERCICE 10.2

Soit p un entier naturel fixé.
Pour tout entier naturel $m \geqslant p$, on note $\mathcal{H}_m$: $\sum_{n=p}^{m}\binom{n}{p} = \binom{m+1}{p+1}$.

Montrons que la propriété initiale $\mathcal{H}_p$ est vraie.

D'une part : $\sum_{n=p}^{p}\binom{n}{p} = \binom{p}{p} = 1$, et d'autre part : $\binom{p+1}{p+1} = 1$. Ainsi $\mathcal{H}_p$ est vraie.

On suppose que $\mathcal{H}_m$ est vraie pour un entier naturel $m \geqslant p$ fixé.

Démontrons que $\mathcal{H}_{m+1}$ est vraie, c'est-à-dire que : $\sum_{n=p}^{m+1}\binom{n}{p} = \binom{m+2}{p+1}$.

On calcule : $\sum_{n=p}^{m+1}\binom{n}{p} = \left[\sum_{n=p}^{m}\binom{n}{p}\right] + \binom{m+1}{p}$.

Par hypothèse de récurrence il vient : $\sum_{n=p}^{m+1}\binom{n}{p} = \binom{m+1}{p+1} + \binom{m+1}{p}$.

Avec la la formule de Pascal, on a finalement : $\sum_{n=p}^{m+1}\binom{n}{p} = \binom{m+2}{p+1}$.

Ainsi $\mathcal{H}_{m+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Autre corrigé :

Soit n et p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.

D'après la formule de Pascal, on a : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Ainsi : $\binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1}$.

On obtient alors par télescopage :

$$\sum_{n=p}^{m}\binom{n}{p} = \sum_{n=p}^{m}\left[\binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1}\right] = \binom{m+1}{p+1} - \binom{p}{p+1}$$

Or $p < p+1$, donc $\binom{p}{p+1} = 0$ et finalement : $\sum_{n=p}^{m}\binom{n}{p} = \binom{m+1}{p+1}$.

EXERCICE 11.1

Il manque les termes en $k=1$ et $k=2$ dans la somme :

$$\sum_{k=3}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 - 1^2 - 2^2 = \frac{10\times(10+1)\times(2\times10+1)}{6} - 5 = \frac{10\times11\times7}{2} - 5$$

On obtient : $\sum_{k=3}^{10} k^2 = \frac{770}{2} - 5 = 385 - 5 = 380$.

On sépare la somme et on voit qu'il manque le terme en $k=1$ dans la somme des k^3 :

$$\sum_{k=2}^{9}(1-2k^3) = \sum_{k=2}^{9}1 - 2\sum_{k=2}^{9}k^3 = (9-2+1) - 2\left(\sum_{k=1}^{9}k^3 - 1^3\right)$$

On obtient : $\sum_{k=2}^{9}(1-2k^3) = 8 - 2\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2 + 2 = 10 - 2\times\frac{9^2\times10^2}{4}$.

Finalement : $\sum_{k=2}^{9}(1-2k^3) = 10 - \frac{8100}{2} = 10 - 4050 = -4040$.

On sépare la somme en observant que n est une constante :

$$\sum_{k=1}^{n}(2^k+n)=\sum_{k=1}^{n}2^k+n\sum_{k=1}^{n}1=2\times\frac{1-2^{n-1+1}}{1-2}+n\times n=2(2^n-1)+n^2$$

La formule du cours appliquée avec $3n$ à la place de n et $n+1$ à la place de m donne :

$$\sum_{i=n+1}^{3n}\left(-\frac{1}{2}\right)^i=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times\frac{1-(-\frac{1}{2})^{3n-(n+1)+1}}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]$$

Comme $(-\frac{1}{2})^{2n}=(\frac{1}{4})^n$, on a finalement : $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{3n}\left(-\frac{1}{2}\right)^i=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

Avec les formules sur les puissances, on a :

$$\sum_{j=0}^{2n+1}\frac{2^{2j}}{3^{j+1}}=\sum_{j=0}^{2n+1}\frac{(2^2)^j}{3\times 3^j}=\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{2n+1}\left(\frac{4}{3}\right)^j=\frac{1}{3}\times\frac{1-(\frac{4}{3})^{(2n+1)+1}}{1-\frac{4}{3}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2n+2}-1$$

On sépare la somme et on simplifie :

$$\sum_{k=n}^{2n+1}\frac{5^k+3^{k+2}}{5^{k+1}}=\sum_{k=n}^{2n+1}\frac{5^k}{5^{k+1}}+\sum_{k=n}^{2n+1}\frac{3^{k+2}}{5^{k+1}}=\sum_{k=n}^{2n+1}\frac{1}{5}+\frac{9}{5}\sum_{k=n}^{2n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^k$$

Il vient avec la formule de la somme géométrique :

$$\sum_{k=n}^{2n+1}\frac{5^k+3^{k+2}}{5^{k+1}}=\frac{1}{5}\sum_{k=n}^{2n+1}1+\frac{9}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n\times\frac{1-(\frac{3}{5})^{(2n+1)-n+1}}{1-\frac{3}{5}}$$

On obtient :

$$\sum_{k=n}^{2n+1}\frac{5^k+3^{k+2}}{5^{k+1}}=\frac{1}{5}\left((2n+1)-n+1\right)+\frac{9}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+2}\right]$$

Finalement :

$$\sum_{k=n}^{2n+1}\frac{5^k+3^{k+2}}{5^{k+1}}=\frac{n+2}{5}+\frac{9}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+2}\right]$$

EXERCICE 11.2

1 D'après le cours, on a : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2 f_n est une fonction polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Comme $f_n(x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^k$, on obtient par dérivation d'une somme :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ f_n'(x)=0+\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$$

La fonction f_n écrite sous la forme $x\mapsto\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
On calcule, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$f_n'(x)=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}=\frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

Finalement, on a démontré que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ \sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

3 En appliquant la question précédente avec $x=2$ et $2n$ à la place de n, il vient :

$$\sum_{k=1}^{2n}k2^k=2\sum_{k=1}^{2n}k2^{k-1}=2\times\frac{2n2^{2n+1}-(2n+1)2^{2n}+1}{(1-2)^2}$$

Comme $2^{2n}=(2^2)^n=4^n$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2n}k2^k=2\left(4n2^{2n}-2n2^{2n}-2^{2n}+1\right)=2\left((2n-1)4^n+1\right)=n4^{n+1}-2\times4^n+2$$

Exercice 13.1

1 On effectue le changement d'indice $i = k+1$ dans la somme :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{i-1}{i!} = \sum_{i=2}^{n+1} \left(\frac{i}{i!} - \frac{1}{i!} \right)$$

Comme $i > 0$, on a : $\dfrac{i}{i!} = \dfrac{i}{i \times (i-1)!} = \dfrac{1}{(i-1)!}$, donc on est ramené à une somme télescopique :

$$A_n = \sum_{i=2}^{n+1} \left(\frac{1}{(i-1)!} - \frac{1}{i!} \right) = \frac{1}{(2-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

2 On écrit le terme général de la somme sous la forme :

$$k \times k! = \big((k+1) - 1\big)\, k! = (k+1)\, k! - k! = (k+1)! - k!$$

On peut ainsi calculer B_n en reconnaissant une somme télescopique :

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)! - k!\big) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$$

3 On écrit le terme général de la somme sous la forme :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

On peut ainsi calculer C_n en reconnaissant une somme télescopique :

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

4 On calcule avec les propriétés du logarithme :

$$D_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k^2-1) - \ln(k^2)\big)$$

Attention, cette dernière somme n'est pas une somme télescopique car si $u_k = \ln(k^2)$, alors $u_{k-1} = \ln((k-1)^2)$ et non $\ln(k^2-1)$.
On utilise une identité remarquable pour obtenir :

$$D_n = \sum_{k=2}^{n} \big(\ln((k+1)(k-1)) - \ln(k^2)\big)$$

Puis avec les propriétés du logarithme, il vient :

$$D_n = \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)\big)$$

On regroupe les termes de façon à faire apparaître des sommes télescopiques :

$$D_n = \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) + \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k-1) - \ln(k)\big)$$

Par télescopage, il vient finalement :

$$D_n = \big(\ln(n+1) - \ln(2)\big) + \big(\ln(2-1) - \ln(n)\big) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

Exercice 15.1

1 Dans D_n, les indices de sommation i et j ne sont pas libres. On décide de placer à gauche la somme portant sur le plus grand des deux indices, ici j. Ainsi :

$$D_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \right)$$

On obtient :

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{n(n+1)}{2} + n \right] = \frac{n(n+3)}{4}$$

2 Si $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, alors $|i-j| = j-i$, et si $0 \leqslant j < i \leqslant n$, alors $|i-j| = i-j$.

Ainsi : $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j| = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j-i) + \sum_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (i-j)$.

En posant alors $i = k$ et $j = \ell$ dans la deuxième somme il vient :

$$\sum_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (i-j) = \sum_{0 \leqslant \ell < k \leqslant n} (k-\ell)$$

On pose maintenant $k = j$ et $\ell = i$ pour obtenir : $\displaystyle\sum_{0 \leqslant \ell < k \leqslant n} (k-\ell) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (i-j) = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$.

(Par la suite on dira « en échangeant les rôles de i et j » lorsque l'on réutilisera ce type de transformation.)

Par ailleurs, si $i = j$, on a $j - i = 0$, donc : $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j-i)$.

EXERCICE 17.1

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 4y &=& 1 \\ 3x + 5y &=& 7 \end{array}\right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow 3L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 6x - 12y &=& 3 \\ 6x + 10y &=& 14 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 6x - 12y &=& 3 \\ 22y &=& 11 \end{array}\right.$$

On obtient alors successivement : $y = \dfrac{11}{22} = \dfrac{1}{2}$, puis : $x = \dfrac{1}{6}(3 + 12y) = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$.

Le système admet donc une unique solution : $(x, y) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

L'ensemble des solutions du système est donné par : $\left\{\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

On commence par éliminer les fractions :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y &=& 1 \\ 3x - 4y &=& -6 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow 6L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} -3x + 4y &=& 6 \\ 3x - 4y &=& -6 \end{array}\right. \Longleftrightarrow 3x - 4y = -6$$

Les deux lignes du système étant proportionnelles, on a éliminé la première.
On dispose d'une équation pour deux inconnues : il faut donc exprimer une inconnue en fonction de l'autre.
On choisit par exemple d'exprimer x en fonction de y :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y &=& 1 \\ 3x - 4y &=& -6 \end{array}\right. \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}(-6 + 4y) \Longleftrightarrow x = -2 + \frac{4}{3}y$$

Il y a donc une infinité de solutions : tous les couples $\left(-2 + \dfrac{4}{3}y, y\right)$ avec $y \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions du système est donné par : $\left\{\left(-2 + \dfrac{4}{3}y, y\right), \text{ avec } y \in \mathbb{R}\right\}$.

EXERCICE 17.2

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x + 2y + z &=& 1 \\ 4x + y - 2z &=& 0 \\ 3x + 3y - z &=& -2 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} -x + 2y + z &=& 1 \\ 9y + 2z &=& 4 \\ 9y + 2z &=& 1 \end{array}\right.$$

Il n'est pas possible d'avoir simultanément $9y + 2z = 4$ et $9y + 2z = 1$.
On en déduit que le système n'admet pas de solution : il est incompatible.
L'ensemble des solutions du système est donné par : $\emptyset$ (ensemble vide).

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + t &=& 0 \\ x - y + z &=& 0 \\ 2y - z + t &=& 0 \\ 2x + z + t &=& 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} x + y + t &=& 0 \\ -2y + z - t &=& 0 \\ 2y - z + t &=& 0 \\ -2y + z - t &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y + t &=& 0 \\ -2y + z - t &=& 0 \end{array}\right.$$

Les lignes 2, 3 et 4 du système étant proportionnelles, on n'a conservé que la ligne 2.
On dispose ainsi de deux équations pour quatre inconnues : il faut donc exprimer deux inconnues en fonction des deux autres.
Le plus simple est d'exprimer x et z en fonction de y et t :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + t &=& 0 \\ x - y + z &=& 0 \\ 2y - z + t &=& 0 \\ 2x + z + t &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y - t \\ z &=& 2y + t \end{array}\right.$$

Finalement il y a une infinité de solutions : tous les quadruplets $(-y-t, y, 2y+t, t)$ avec $y, t \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions est donné par : $\{(-y - t, y, 2y + t, t), \text{ avec } y, t \in \mathbb{R}\}$.

21.1

1 On calcule :

$$\overline{S_n} = \overline{\sum_{k=-n}^{n} e^{ik^3}} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{e^{ik^3}} = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ik^3} = \sum_{k=-n}^{n} e^{i(-k)^3} \underset{\ell=-k}{=} \sum_{\ell=-n}^{n} e^{i\ell^3}$$

En renommant ℓ en k, on obtient : $\overline{S_n} = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik^3} = S_n$.

Comme $\overline{S_n} = S_n$, on en déduit que S_n est réel.

2 On calcule :

$$\overline{T_n} = \overline{\sum_{k=0}^{n} e^{i\frac{k\pi}{n}}} = \sum_{k=0}^{n} \overline{e^{i\frac{k\pi}{n}}} = \sum_{k=0}^{n} e^{-i\frac{k\pi}{n}} \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=0}^{n} e^{-i\frac{(n-\ell)\pi}{n}}$$

En séparant l'exponentielle puis en renommant ℓ en k, on obtient :

$$\overline{T_n} = \sum_{\ell=0}^{n} e^{-i\pi} e^{i\frac{\ell\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1) \times e^{i\frac{k\pi}{n}} = -T_n$$

Comme $\overline{T_n} = -T_n$, on en déduit que T_n est imaginaire pur.

22.1

1 On calcule :

$$\begin{aligned} S_n(x) + iT_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(\cos(kx) + i\sin(kx)\big) \end{aligned}$$

En reconnaissant la formule du binôme, il vient :

$$S_n(x) + iT_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k \times 1^{n-k} = \left(1 + e^{ix}\right)^n$$

2 On factorise alors le second membre par l'angle moitié :

$$\left(1 + e^{ix}\right)^n = \left(e^{ix/2}\left(e^{-ix/2} + e^{ix/2}\right)\right)^n \underset{\text{Euler}}{=} e^{inx/2}\big(2\cos(x/2)\big)^n$$

Finalement :

$$S_n(x) + iT_n(x) = \cos(nx/2)\big(2\cos(x/2)\big)^n + i\sin(nx/2)\big(2\cos(x/2)\big)^n$$

Or $\cos(nx/2)\,(2\cos(x/2))^n$ et $S_n(x)$ sont réels, $\sin(nx/2)\,(2\cos(x/2))^n$ et $T_n(x)$ sont réels, donc par unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe, il vient :

$$S_n(x) = \cos(nx/2)\big(2\cos(x/2)\big)^n \quad \text{et} \quad T_n(x) = \sin(nx/2)\big(2\cos(x/2)\big)^n$$

31.1 On a $A^0 = I_3$ et $A^1 = A$.

On suppose désormais $n \geqslant 2$ et on écrit $A = 2I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices $2I_3$ et N commutent puisque $(2I_3)N = 2N = N(2I_3)$.

De plus $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $N^3 = O_3$ et pour tout $k \geqslant 3$, $N^k = \underbrace{N^3}_{=O_3} N^{k-3} = O_3$.

On applique la formule du binôme avec $n \geqslant 2$ (la dernière somme est nulle si $n = 2$) :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} O_3 (2I_3)^{n-k}$$

En explicitant, il reste :

$$A^n = \binom{n}{0} 2^n N^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} N^1 + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 + O_3$$

Il vient :

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \times 2^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 2$, on a donc : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \times 2^{n-1} & n(n-1) \times 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n \times 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

On constate que la formule reste valable avec $n \in \{0, 1\}$.

On retiendra que si N est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) d'ordre p de diagonale nulle, alors il existe un entier naturel r tel que $N^r = O_p$, ce qui facilite le calcul de ses puissances puisque : $\forall\, k \geqslant r$, $N^k = O_p$.

31.2

1 On calcule $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$.

2 On calcule $J^3 = J^2 J = 3JJ = 3J^2 = 9J$.
Une récurrence immédiate donne pour tout $k \geqslant 1$, $J^k = 3^{k-1} J$.

3 On observe que $A = -4I_3 + J$.
On vérifie que $(-4I_3)J = -4J = J(-4I_3)$, donc $-4I_3$ et J commutent.
La formule du binôme de Newton donne alors pour tout $n \geqslant 0$:

$$A^n = (-4I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-4I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^{n-k} J^k$$

On suppose $n \geqslant 1$ pour pouvoir isoler le terme en $k = 0$:

$$\begin{aligned} A^n &= \binom{n}{0}(-4)^n J^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-4)^{n-k} J^k \\ &= (-4)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-4)^{n-k} 3^{k-1} J \\ &= (-4)^n I_3 + \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-4)^{n-k}\right] J \quad \text{puisque } 3^{k-1} = \frac{1}{3} 3^k \\ &= (-4)^n I_3 + \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-4)^{n-k} - \binom{n}{0} 3^0 (-4)^n\right] J \end{aligned}$$

On reconnaît la formule du binôme de Newton pour les réels :

$$A^n = (-4)^n I_3 + \frac{1}{3}\Big[(3-4)^n - (-4)^n\Big] J = (-4)^n I_3 + \frac{1}{3}\Big[(-1)^n - (-4)^n\Big] J$$

En explicitant les matrices et en simplifiant, il vient finalement :

$$\forall n \geqslant 1,\ A^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n+2\times(-4)^n}{3} & \frac{(-1)^n-(-4)^n}{3} & \frac{(-1)^n-(-4)^n}{3} \\ \frac{(-1)^n-(-4)^n}{3} & \frac{(-1)^n+2\times(-4)^n}{3} & \frac{(-1)^n-(-4)^n}{3} \\ \frac{(-1)^n-(-4)^n}{3} & \frac{(-1)^n-(-4)^n}{3} & \frac{(-1)^n+2\times(-4)^n}{3} \end{pmatrix}$$

On constate que la formule reste valable si $n = 0$.

4 Dans le cas général, on montre que pour tout $k \geqslant 1$, $(J_p)^k = p^{k-1} J_p$ (récurrence) puis que $(\alpha I_p)(\beta J_p) = \alpha\beta J_p = (\beta J_p)(\alpha I_p)$.
Comme les matrices commutent la formule du binôme s'applique et on obtient (étapes de calculs identiques au cas précédent) :

$$\forall n \geqslant 1,\ (\alpha I_p + \beta J_p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^{n-k} \alpha^k (J_p)^k = \beta^n I_p + \frac{(p\alpha+\beta)^n - \beta^n}{p} J_p$$

En explicitant, il vient pour $n \geqslant 1$:

$$(\alpha I_p + \beta J_p)^n = \begin{pmatrix} \frac{(p\alpha+\beta)^n+(p-1)\beta^n}{p} & \frac{(p\alpha+\beta)^n-\beta^n}{p} & \cdots & \frac{(p\alpha+\beta)^n-\beta^n}{p} \\ \frac{(p\alpha+\beta)^n-\beta^n}{p} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{(p\alpha+\beta)^n-\beta^n}{p} \\ \frac{(p\alpha+\beta)^n-\beta^n}{p} & \cdots & \frac{(p\alpha+\beta)^n-\beta^n}{p} & \frac{(p\alpha+\beta)^n+(p-1)\beta^n}{p} \end{pmatrix}$$

On constate que la formule reste valable si $n = 0$.

Il faut savoir redémontrer par récurrence que si J_p est la matrice carrée d'ordre p dont tous les coefficients valent 1, alors J_p vérifie la relation : $\forall k \geqslant 1$, $(J_p)^k = p^{k-1} J_p$.
Attention la relation n'est pas valable si $k = 0$.

32.1

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$ puis $P(A) = A^2 - 6A + 9I_2 = O_2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe deux polynômes réels Q_n et R_n tels que : $X^n = P \times Q_n + R_n$ et $\deg(R_n) < \deg(P)$.
Comme $\deg(P) = 2$ il existe deux réels a_n et b_n tels que $R_n = a_n X + b_n$.

On dérive la relation de division euclidienne :

$$nX^{n-1} = P' \times Q_n + P \times Q'_n + R'_n$$

Or $P = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$ (identité remarquable), donc $P' = 2(X-3)$.
Il vient en évaluant en 3 les relations issues de la division euclidienne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3^n & = & P(3)Q_n(3) + R_n(3) \\ n \times 3^{n-1} & = & P'(3)Q_n(3) + P(3)Q_n'(3) + R_n'(3) \end{array}\right.$$

Comme $P(3) = P'(3) = 0$ la deuxième relation donne directement : $a_n = n \times 3^{n-1}$.
La première relation donne : $3^n = 0 + 3a_n + b_n$, donc : $b_n = 3^n - 3a_n = -(n-1)3^n$.
Finalement en évaluant la relation de division euclidienne en A il vient :

$$A^n = P(A)Q_n(A) + a_nA + b_nI_2 = O_2 + a_nA + b_nI_2 = n \times 3^{n-1}A - (n-1) \times 3^n I_2$$

On explicite : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} (-2n+9) \times 3^n & n \times 3^n \\ -4n \times 3^n & (2n+9) \times 3^n \end{pmatrix}$.

EXERCICE 32.2

1 On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -5 & 16 & 20 \\ 5 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

On vérifie alors que $A^3 + A^2 - 4A - 4I_3 = O_3$, c'est-à-dire que $P(A) = O_3$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe deux polynômes réels Q_n et R_n tels que : $X^n = P \times Q_n + R_n$ et $\deg(R_n) < \deg(P)$.
Comme $\deg(P) = 3$ il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que $R_n = a_nX^2 + b_nX + c_n$.
On observe que P admet trois racines évidentes qui sont -2, -1 et 2 et comme P est de degré 3 ce sont exactement les racines de P.
En évaluant la relation de division euclidienne en ces racines, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (-2)^n & = & P(-2)Q_n(-2) + a_n \times (-2)^2 + b_n \times (-2) + c_n \\ (-1)^n & = & P(-1)Q_n(-1) + a_n \times (-1)^2 + b_n \times (-1) + c_n \\ 2^n & = & P(2)Q_n(2) + a_n \times 2^2 + b_n \times 2 + c_n \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcccccc} (-2)^n & = & 4a_n & - & 2b_n & + & c_n \\ (-1)^n & = & a_n & - & b_n & + & c_n \\ 2^n & = & 4a_n & + & 2b_n & + & c_n \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 4L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcccccc} (-2)^n & = & 4a_n & - & 2b_n & + & c_n \\ 4(-1)^n - (-2)^n & = & & - & 2b_n & + & 3c_n \\ 2^n - (-2)^n & = & & & 4b_n & & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{1}{4}\big((-2)^n + 2b_n - c_n\big) = -\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{12} + \frac{(-2)^n}{4} \\ c_n & = & \frac{1}{3}\big(4(-1)^n - (-2)^n + 2b_n\big) = \frac{4\times(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6} - \frac{(-2)^n}{2} \\ b_n & = & \frac{2^n-(-2)^n}{4} \end{array}\right.$$

Par ailleurs on a vu en première question que $P(A) = O_3$, donc en évaluant la relation de division euclidienne en A il vient :

$$A^n = P(A)Q_n(A) + a_nA^2 + b_nA + c_nI_3 = a_nA^2 + b_nA + c_nI_3$$

On explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \left[-\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{12} + \frac{(-2)^n}{4}\right]A^2 + \left[\frac{2^n - (-2)^n}{4}\right]A + \left[\frac{4\times(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6} - \frac{(-2)^n}{2}\right]I_3$$

3 Pour tout entier naturel n, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On calcule, pour tout entier naturel n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
Une récurrence immédiate donne alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$.
À l'aide du résultat de la question précédente il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \left[-\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{12} + \frac{(-2)^n}{4}\right]A^2X_0 + \left[\frac{2^n - (-2)^n}{4}\right]AX_0 + \left[\frac{4\times(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6} - \frac{(-2)^n}{2}\right]X_0$$

Comme $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, seul le coefficient du bas nous intéresse.

On a $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on calcule $AX_0 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A^2X_0 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4 \times (-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6} - \frac{(-2)^n}{2}$$

Exercice 34.2

1. B et C sont des matrices carrées d'ordre 2.

On calcule : $3\times 2 - 1\times 4 = 2 \neq 0$, donc A est inversible et : $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On calcule : $(-1)\times(-4) - 2\times 2 = 0$, donc B n'est pas inversible.

On calcule : $(-2)\times(-3) - 1\times 4 = 2 \neq 0$, donc C est inversible et : $C^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

On aurait aussi pu observer que $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}C$, donc $C = -2A^{-1}$.

On en déduit alors que C est inversible, d'inverse $C^{-1} = \dfrac{1}{-2}\left(A^{-1}\right)^{-1} = -\dfrac{1}{2}A$.

Exercice 34.3

1. On calcule successivement : $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 16 \\ 6 & 6 & 12 \\ 10 & 7 & 17 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 53 & 38 & 91 \\ 42 & 24 & 66 \\ 58 & 37 & 95 \end{pmatrix}$.

   Ainsi : $A^3 - 4A^2 - 9A = O_3$.

2. En factorisant A dans le membre de gauche, il vient : $A(A^2 - 4A - 9I_3) = O_3$.

   On vérifie par ailleurs que $B = A^2 - 4A - 9I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \neq O_3$.

   On a donc trouvé une matrice non nulle B carrée d'ordre 3 telle que $AB = O_3$.

3. Supposons par l'absurde que A est inversible.
   On note A^{-1} son inverse. En multipliant chaque membre de l'égalité $AB = O_3$ à gauche par A^{-1} on obtient : $A^{-1}AB = A^{-1}O_3$, donc $B = O_3$.

   Or $B \neq O_3$ d'après la question précédente : nous avons donc obtenu une contradiction.
   On en déduit que A n'est pas inversible.

Exercice 35.1

1. On résout le système d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et de second membre $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$AX = Y \iff \begin{cases} 2x + y - z = a \\ \quad 2y - z = b \\ -x + y + 2z = c \end{cases} \underset{L_3 \leftrightarrow 2L_3 + L_1}{\iff} \begin{cases} 2x + y - z = a \\ \quad 2y - z = b \\ \quad 3y + 3z = a + 2c \end{cases}$$

On obtient finalement avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$:

$$AX = Y \iff \begin{cases} 2x + y - z = a \\ \quad 2y - z = b \\ \quad 9y = a + 3b + 2c \end{cases}$$

Il vient en troisième ligne : $y = \frac{1}{9}a + \frac{3}{9}b + \frac{2}{9}c$.

Puis avec la deuxième ligne : $z = 2y - b = \frac{2}{9}a - \frac{3}{9}b + \frac{4}{9}c$.

Enfin avec la première ligne : $x = \frac{1}{2}(a - y + z) = \frac{5}{9}a - \frac{3}{9}b + \frac{1}{9}c$

Finalement, en remettant les inconnues dans l'ordre on trouve :

$$AX = Y \iff \begin{cases} x = \frac{5}{9}a - \frac{3}{9}b + \frac{1}{9}c \\ y = \frac{1}{9}a + \frac{3}{9}b + \frac{2}{9}c \\ z = \frac{2}{9}a - \frac{3}{9}b + \frac{4}{9}c \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Pour toute matrice colonne Y, le système $AX = Y$ admet une unique solution.

On en déduit que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. On remarque que $B = 2\,{}^t\!A$.
   Comme A est inversible, B est aussi inversible et on a :

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\,{}^t(A^{-1}) = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. T est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc T est inversible.
   On détermine T^{-1}.
   Pour cela, on résout le système d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et de second membre $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$:

$$TX = Y \iff \begin{cases} 2x + y + 3z = a \\ \quad 3y + z + 2t = b \\ \quad -z + t = c \\ \quad t = d \end{cases}$$

S'agissant d'un système échelonné, on peut le résoudre par substitution.

D'abord on a : $t = d$, puis : $z = t - c = -c + d$.

Ensuite : $y = \frac{1}{3}(b - z - 2t) = \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}(-c + d) - \frac{2}{3}d = \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c - d$.

Enfin : $x = \frac{1}{2}(a - y - 3z) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c - d\right) - \frac{3}{2}(-c + d) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b + \frac{4}{3}c - d$.

Ce qui donne :

$$TX = Y \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b + \frac{4}{3}c - d \\ y = \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c - d \\ z = -c + d \\ t = d \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{T^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Exercice 36.1

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.
Point fixe :

$$c=\frac{2}{3}c+1 \iff c-\frac{2}{3}c=1 \iff \frac{1}{3}c=1 \iff c=3$$

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n=u_n-3$ et on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{2}{3}u_n+1-3=\frac{2}{3}u_n-2$$

Or $u_n=v_n+3$, donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_{n+1}=\frac{2}{3}(v_n+3)-2=\frac{2}{3}v_n$$

On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $2/3$.

On a $v_1=u_1-3=-\frac{2}{3}$, donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}v_1=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Finalement comme $u_n=v_n+3$, il vient : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=3-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Comme $-1<\frac{2}{3}<1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

Exercice 37.1

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
Équation caractéristique :

$$x^2=\frac{\sqrt{2}}{5}x-\frac{1}{25} \iff x^2-\frac{\sqrt{2}}{5}x+\frac{1}{25}=0 \iff 5x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{5}=0$$

On a : $\Delta=2-4\times5\times\frac{1}{5}=-2=(\mathrm{i}\sqrt{2})^2$, donc il y a deux solutions complexes :

$$z_1=\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2\times5}=\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{5}e^{\mathrm{i}\pi/4}\quad\text{et}\quad z_2=\overline{z_1}=\frac{1}{5}e^{-\mathrm{i}\pi/4}$$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\lambda\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\mu\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Les conditions initiales donnent le système suivant :

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\lambda\cos(0)+\mu\sin(0)\right) & =2 \quad (=u_0)\\ \left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\lambda\cos(\frac{\pi}{4})+\mu\sin(\frac{\pi}{4})\right) & =\frac{\sqrt{2}}{10} \quad (=u_1)\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda & =2\\ \frac{1}{5}\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}+\mu\frac{\sqrt{2}}{2}\right) & =\frac{\sqrt{2}}{10}\end{cases}$$

La deuxième égalité amène $\mu=-1$, d'où :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(2\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant|u_n|\leqslant\frac{1}{5^n}\left(2\left|\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left|\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\leqslant\frac{3}{5^n}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{5^n}=0$, donc par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n|=0$. Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Exercice 37.2

Notons tout d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas récurrente linéaire d'ordre 2 puisque les coefficients de u_{n+1} et de u_n dépendent de n.

1 On a pour tout entier naturel n :

$$v_{n+2}=\frac{u_{n+2}}{n+3}=\frac{1}{n+3}\left[\frac{5(n+3)}{2(n+2)}u_{n+1}+\frac{3(n+3)}{2(n+1)}u_n\right]$$

Donc pour tout entier naturel n :

$$v_{n+2}=\frac{5}{2}\frac{u_{n+1}}{n+2}+\frac{3}{2}\frac{u_n}{n+1}=\frac{5}{2}v_{n+1}+\frac{3}{2}v_n$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

2 Équation caractéristique :

$$x^2=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2} \iff 2x^2-5x-3=0 \underset{\Delta=49}{\iff} x=-\frac{1}{2}\ \text{ou}\ x=3$$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\,3^n$.
Les conditions initiales donnent le système suivant :

$$\begin{cases}\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\mu\,3^0=-1 & (=v_0=u_0/1)\\ \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\mu\,3^1=\frac{15}{2} & (=v_1=u_1/2)\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda+\mu & =-1\\ -\lambda+6\mu & =15\end{cases}$$

En sommant les deux lignes, on obtient $7\mu=14$, donc $\mu=2$.

On a alors : $\lambda=-1-\mu=-3$. Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+2\times3^n$.

3 On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=(n+1)v_n=-3(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+2(n+1)3^n$.

4 On écrit : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=-3n\left(-\frac{1}{2}\right)^n-3\left(-\frac{1}{2}\right)^n+2(n+1)3^n$.

Comme $-1<-\frac{1}{2}<1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$.

On a de plus $3>1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)3^n=+\infty$. Par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

EXERCICE 38.1

1 Il y a une forme indéterminée du type « $(+\infty)-(+\infty)$ ».
On a : $\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(1)=0$.

2 Il y a une forme indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».
On a :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=\frac{\ln\left(n\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)}{\ln(n)}=\frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}=1+\frac{1}{\ln(n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Le produit de droite n'est plus indéterminé : $\frac{1}{\ln(n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
Finalement : $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

3 Comme $\frac{3}{2}>1$ et $\frac{5}{4}>1$, il y a une forme indéterminée du type « $(+\infty)-(+\infty)$ ».
On a $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}>\frac{5}{4}$, donc on écrit :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{5}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^n\left[1-\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right]=\left(\frac{3}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

On obtient : $\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{5}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^n\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]$.
Or $-1<\frac{5}{6}<1$, donc : $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.
Finalement par produit : $\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{5}{4}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

4 Comme $-1<\frac{1}{5}<1$ et $-1<\frac{1}{2}<1$, on a : $\left(\frac{1}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
Comme $\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$, on a $\left(\frac{1}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n<0$, donc : $\left(\frac{1}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0^-$.
Par inverse, on obtient : $\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$.

5 Il y a une forme indéterminée du type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ».
On factorise :

$$\frac{n!+n^{2019}}{\sqrt{n}+2018^n}=\frac{n!}{2018^n}\times\frac{1+\frac{n^{2019}}{n!}}{\frac{\sqrt{n}}{2018^n}+1}$$

Comme $2018>1$, on a par croissances comparées : $\frac{1+\frac{n^{2019}}{n!}}{\frac{\sqrt{n}}{2018^n}+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1+0}{0+1}=1$.
Toujours par croissances comparées, on a : $\frac{n!}{2018^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.
Finalement par produit, il vient : $\frac{n!+n^{2019}}{\sqrt{n}+2018^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

6 Il y a une forme indéterminée du type « $(+\infty)-(+\infty)$ ».
On multiplie par l'expression conjuguée :

$$n\left(\sqrt{n^2+\frac{1}{n^2}}-n\right)=\frac{n\left(\sqrt{n^2+\frac{1}{n^2}}-n\right)\left(\sqrt{n^2+\frac{1}{n^2}}+n\right)}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n^2}}+n}$$

Ainsi : $n\left(\sqrt{n^2+\frac{1}{n^2}}-n\right)=\frac{n\left(\left(n^2+\frac{1}{n^2}\right)-n^2\right)}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n^2}}+n}=\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n^2}}+n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

EXERCICE 38.2

1 On a : $n^{\frac{1}{\ln(n)}}=e^{\frac{1}{\ln(n)}\times\ln(n)}=e^1=e\xrightarrow[n\to+\infty]{}e$ (la suite est constante égale à e).

2 On a : $(1+2^n)^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\times\ln(1+2^n)}$.
Or : $\frac{1}{n}\ln(1+2^n)=\frac{1}{n}\ln\left(2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)\right)=\frac{1}{n}\left[n\ln(2)+\ln\left(\frac{1}{2^n}+1\right)\right]$.
Il vient : $\frac{1}{n}\ln(1+2^n)=\ln(2)+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{2^n}+1\right)$.
Comme $2>1$, on a $2^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, donc : $\ln\left(\frac{1}{2^n}+1\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(1)=0$.
Le produit de droite n'est plus indéterminé et on a : $\frac{1}{n}\ln(1+2^n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)$.
Finalement : $(1+2^n)^{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{\ln(2)}=2$.

3 On écrit : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln(1+1/n)}=e^{\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}}$.
Or : $1/n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $\frac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1$, donc par composition $\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.
Finalement, par composition avec l'exponentielle il vient : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}e$.

EXERCICE 40.2

1 La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=e^x-1$.
Or pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)\geqslant0\iff e^x\geqslant1\iff x\geqslant0$.
On en déduit les variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après les variations de g, on a : $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x-x-1=g(x)\geqslant0$.

2 On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=e^{u_n}-1-u_n=g(u_n)\geqslant0$ (d'après la question 1).
Ainsi la suite (u_n) est croissante.

3 On suppose que (u_n) converge vers un réel ℓ.
Pour calculer ℓ, on passe à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.
D'une part, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on a aussi : $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
D'autre part, comme $t \mapsto e^t - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, cette fonction est continue en ℓ et on a : $e^{u_n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^\ell - 1$.
Ainsi :

$$\ell = e^\ell - 1 \iff e^\ell - \ell - 1 = 0 \iff g(\ell) = 0$$

Or on a vu dans la question 1 que g admet un minimum global sur $\mathbb{R}$, égal à 0 et atteint uniquement en $x = 0$. Ainsi : $g(\ell) = 0 \iff \ell = 0$.
On a donc prouvé que si (u_n) converge, alors (u_n) converge vers 0.

Attention, on n'a pas prouvé ici que la suite (u_n) converge vers 0. On a uniquement prouvé que 0 est la seule limite finie *possible* pour la suite (u_n).

4 En tant que suite croissante, ou bien (u_n) converge, ou bien (u_n) diverge vers $+\infty$.
Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers un réel ℓ.
D'après la question précédente, on a nécessairement $\ell = 0$.
Mais comme (u_n) est croissante, on sait aussi que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_0$.
Par passage à la limite dans les inégalités larges, il vient : $\ell \geqslant u_0$, donc $0 \geqslant u_0$, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse $u_0 > 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

CICE 42.1

1 Il y a une forme indéterminée du type « $(+\infty) - (+\infty)$ ».

On écrit : $\sqrt{x^2+1} + x = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

Or : $\sqrt{x^2+1} - x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, donc par inverse : $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = 0$.

2 En $+\infty$, il y a une forme indéterminée du type « $(+\infty) - (+\infty)$ » au numérateur.
On factorise par les termes « les plus forts » en $+\infty$, à savoir x au numérateur et $\ln(x)$ au dénominateur :

$$\frac{\ln(x) - x}{\ln(x) - 1} = \frac{x \times \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1\right)}{\ln(x) \times \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)} = \frac{x}{\ln(x)} \times \frac{\frac{\ln(x)}{x} - 1}{1 - \frac{1}{\ln(x)}}$$

Par croissances comparées : $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc : $\dfrac{\frac{\ln(x)}{x} - 1}{1 - \frac{1}{\ln(x)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$.

De plus par inverse de croissances comparées, on a : $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Finalement, on a par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x) - x}{\ln(x) - 1} = -\infty$.

En 0^+, il y a une forme indéterminée du type « $\frac{(-\infty)}{(-\infty)}$ ».
On factorise par les termes « les plus forts » en 0^+, à savoir $\ln(x)$ au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{\ln(x) - x}{\ln(x) - 1} = \frac{\ln(x) \times \left(1 - \frac{x}{\ln(x)}\right)}{\ln(x) \times \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)} = \frac{1 - \frac{x}{\ln(x)}}{1 - \frac{1}{\ln(x)}}$$

Sans indétermination, on a : $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$, d'où : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x) - x}{\ln(x) - 1} = 1$.

3 Il y a une forme indéterminée du type « $\frac{(+\infty)}{(+\infty)}$ ».

On écrit : $\frac{\ln(3x+1)}{x} = \frac{\ln\left(x(3+\frac{1}{x})\right)}{x} = \frac{\ln(x)+\ln(3+\frac{1}{x})}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\ln(3+\frac{1}{x})$.

Or par croissances comparées, on a : $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Puis par produit (sans indétermination) : $\frac{1}{x}\ln(3+\frac{1}{x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Par somme, il vient alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(3x+1)}{x} = 0$.

Remarque : on peut aussi procéder en transformant habilement l'expression :

$$\frac{\ln(3x+1)}{x} = \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} \times \frac{3x+1}{x} = \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} \times (3 + 1/x)$$

On conclut en composant avec des croissances comparées et en faisant un produit de limites.

Il y a une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».
On écrit : $\frac{\ln(3x+1)}{x} = 3 \times \frac{\ln(3x+1)}{3x}$.

Or $3x \xrightarrow[x\to0]{} 0$, et par limite de taux d'accroissement, on a : $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to0]{} 1$.

Ainsi, par composition et produit : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(3x+1)}{x} = 3$.

4 Il y a une forme indéterminée du type « $(-\infty) \times 0$ ».

On écrit : $x^3 e^x = \frac{x^3}{e^{-x}} = -\frac{(-x)^3}{e^{-x}}$.

Or $-x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et par croissances comparées : $\frac{t^3}{e^t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Ainsi par composition : $\frac{(-x)^3}{e^{-x}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. Finalement : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^x = 0$.

De façon générale, on pourra retenir que si $n \in \mathbb{N}$, alors : $x^n e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

5 On écrit la forme exponentielle : $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\times\ln(x)} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

Or par croissances comparées : $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Comme de plus $e^t \xrightarrow[t\to 0]{} e^0 = 1$, il vient par composition : $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

6 Il y a une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

On écrit : $\frac{e^{2x}-1}{x} = 2 \times \frac{e^{2x}-1}{2x}$.

Or $2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et par limite de taux d'accroissement, on a : $\frac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$.

Ainsi, par composition et produit : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2$.

7 Il y a une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

On écrit : $\frac{\tan(x)}{x} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \frac{1}{\cos(x)} \times \frac{\sin(x)}{x}$.

Or $\cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, et par limite de taux d'accroissement, on a : $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Ainsi, par produit : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$.

8 La fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$, il s'agit donc d'une forme indéterminée.

Mais on dispose de l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\cos(x)| \leqslant 1$.

Pour tout $x > 0$, en divisant par $x^2 > 0$, il vient : $\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$.

Or $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc par encadrement il vient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x^2} = 0$.

Exercice 43.1

On a $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, donc par inverse et produit : $f(x) = x \times \frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

Ainsi : $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$ et f est continue en 0.

Par ailleurs, comme $\ln(x) < 0$ sur $]0,1[$, on a : $\ln(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0^-$.

On en déduit par inverse et produit que : $f(x) = x \times \frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty$.

Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en 1.

Par croissances comparées, on a : $t = x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

De plus, la fonction exponentielle étant continue en 0, on a : $e^t \xrightarrow[t\to 0]{} e^0 = 1$.

On en déduit par composition que : $g(x) = x^x = e^{x\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1 \neq g(0)$.

Ainsi g n'est pas continue en 0.

Notons que g aurait été continue en 0 si l'on avait posé $g(0) = 1$ au lieu de $g(0) = 0$.

Exercice 43.2

f est continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ car polynomiale sur ces deux intervalles.

De plus : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1+x^2) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1-x^3) = 0$.

On observe que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, donc f n'est pas continue en 1.

Ainsi f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$, donc par composition g est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

De plus : $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos(3x) = \cos(0) = 1$ (par continuité de cosinus en 0).

Puis : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-\sin(2x)) = 1$ (par continuité de sinus en 0).

Enfin, on a : $g(0) = 1 - \sin(0) = 1$.

On observe que $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$, donc g est continue en 0.

Ainsi g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 43.3

On a : $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$. On distingue alors trois cas :

Si $\alpha < 0$, alors $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et par produit : $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$.

On en déduit que f_α n'est pas prolongeable par continuité en 0 lorsque $\alpha < 0$.

Si $\alpha = 0$, alors $f_\alpha(x) = \ln(x)$, donc : $f_\alpha(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$.

On en déduit que f_α n'est pas non plus prolongeable par continuité en 0 lorsque $\alpha = 0$.

Si $\alpha > 0$, alors par croissances comparées il vient : $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

Lorsque $\alpha > 0$, f_α est ainsi prolongeable par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$.

Conclusion : f_α est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\alpha > 0$.

1 Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $t(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Si $x > 0$, alors on peut écrire : $t(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2}}\, e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Or on a $\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ et par croissances comparées : $\sqrt{u}\, e^{-u} = \dfrac{\sqrt{u}}{e^u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$.

Ainsi par composition $t(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

Si $x < 0$, alors on peut écrire : $t(x) = -\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}\, e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Un calcul identique au précédent donne encore $t(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$.

Ainsi f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.

Comme $f'_g(0) = f'_d(0)$ $(= 0)$, on en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

2 Pour tout $x > 0$, on a $x^3 > 0$, donc : $t(x) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{|x^3|}{x} = \dfrac{x^3}{x} = x^2$.

Ainsi $t(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, donc g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$.

Pour tout $x < 0$, on a $x^3 < 0$, donc : $t(x) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{|x^3|}{x} = \dfrac{-x^3}{x} = -x^2$.

Ainsi $t(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$, donc g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0) = 0$.

Comme $g'_g(0) = g'_d(0)$ $(= 0)$, on en déduit que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 0$.

EXERCICE 44.2

1 On a : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2x^2 = 2$ et de même : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^3 + x) = 2$.

Enfin, on a : $f(1) = 2 \times 1^2 = 2$, donc : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$.

Ainsi f est continue en 1.

De plus $u : x \mapsto 2x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = 4x$.
u étant dérivable en 1, on sait que f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = u'(1) = 4$.

De même $v : x \mapsto x^3 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) = 3x^2 + 1$.
v étant dérivable en 1, on sait que f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = v'(1) = 4$.

Comme $f'_g(1) = f'_d(1)$ $(= 4)$, on en déduit que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 4$.

2 $u : x \mapsto \cos(3x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = -3\sin(3x)$.
u étant dérivable en 0, on sait que g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0) = u'(0) = 0$.

De même $v : x \mapsto 1 - \sin(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) = -2\cos(2x)$.
v étant dérivable en 0, on sait que g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = v'(0) = -2$.

Comme $g'_g(0) \neq g'_d(0)$, on en déduit que g n'est pas dérivable en 0.

EXERCICE 44.3

On a vu dans la fiche 43 que f_α est continue en 0 si et seulement si $\alpha > 0$. Comme la dérivabilité implique la continuité, pour que f_α soit dérivable en 0, on doit nécessairement avoir $\alpha > 0$.
On suppose donc $\alpha > 0$ et on calcule pour tout $x > 0$:

$$t(x) = \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha \ln(x)}{x} = x^{\alpha - 1}\ln(x)$$

Ainsi :

- Si $0 \leqslant \alpha < 1$ ou si $\alpha = 1$, alors : $t(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$.
  Dans ce cas f_α n'est pas dérivable à droite en 0.
- Si $\alpha > 1$, alors par croissances comparées : $t(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.
  Dans ce cas f_α est dérivable à droite en 0 et $(f_\alpha)'_d(0) = 0$.

Conclusion : f_α est dérivable à droite en 0 si et seulement si $\alpha > 1$.

EXERCICE 50.1

1 f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \dfrac{2x}{2 + x^2}$.
Ainsi :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\left(\begin{array}{l}\text{La limite en } +\infty \text{ n'est} \\ \text{pas indéterminée.}\end{array}\right)$

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
D'après le théorème de la bijection, on sait alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \left[\ln(2), +\infty\right[$.

2 Soit $x \in \left[\ln(2), +\infty\right[$ (intervalle d'arrivée). On a par théorème : $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

On utilise l'expression de f pour expliciter : $\ln\left(2 + \left(f^{-1}(x)\right)^2\right) = x$.

Il vient : $2 + \left(f^{-1}(x)\right)^2 = e^x$, d'où : $\left(f^{-1}(x)\right)^2 = e^x - 2$.

Exercice 52.1

1 Soit $n \geqslant 3$. La fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$$

Ainsi $f_n'(x)$ est du signe de $x - n$ sur $]0,+\infty[$ et on a :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$n - n\ln(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

La limite de f_n en 0 n'est pas indéterminée.
La limite de f_n en $+\infty$ a été vue dans la fiche 42.

f_n est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]0,n[$.
D'après le théorème de la bijection, on sait alors que f_n réalise une bijection de $]0,n[$ sur $f_n(]0,n[) =]n - n\ln(n), +\infty[$.
Or $n \geqslant 3 > e$, donc $\ln(n) > 1$, donc $n - n\ln(n) < 0$.
Ainsi $0 \in]n - n\ln(n), +\infty[= f_n(]0,n[)$.
On en déduit que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $]0,n[$.
De même, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution v_n sur $]n,+\infty[$.

On a : $\forall n \geqslant 3$, $v_n \geqslant n$. De plus : $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
D'après le théorème de comparaison, il vient : $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Soit $n \geqslant 3$. Pour établir l'inégalité, on compare les images par f_n :

$$f_n(1) = 1 - n\ln(1) = 1 \quad ; \quad f_n(u_n) = 0 \quad ; \quad f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$$

car $n \geqslant 3 > e$. Ainsi : $f_n(1) > f_n(u_n) > f_n(e)$.
Or f_n est strictement décroissante sur $]0,n]$ et 1, u_n et e appartiennent à $]0,n]$.
On en déduit que : $1 < u_n < e$.

Soit $n \geqslant 3$. Par définition, on a $f_n(u_n) = 0$, donc : $u_n - n\ln(u_n) = 0$.
On calcule alors :

$$f_{n+1}(u_n) = u_n - (n+1)\ln(u_n) = \underbrace{u_n - n\ln(u_n)}_{=0} - \ln(u_n) = -\ln(u_n)$$

Or $u_n > 1$, donc $-\ln(u_n) < 0$, donc : $f_{n+1}(u_n) < 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
Or f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0,n]$ et u_n, u_{n+1} appartiennent à $]0,n]$, donc :

$$\forall n \geqslant 3, \ u_n > u_{n+1}$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est (strictement) décroissante.

Étant décroissante et minorée (par 1), la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente.

On a vu que : $\forall n \geqslant 3$, $1 \leqslant u_n \leqslant e$, donc : $\forall n \geqslant 3$, $\frac{1}{n} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{e}{n}$.
Or : $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{e}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Ainsi d'après le théorème d'encadrement : $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Souvenons-nous à présent que $f_n(u_n) = 0$, donc que : $u_n - n\ln(u_n) = 0$.
On en déduit que : $n\ln(u_n) = u_n$, d'où : $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$.
D'après ce qui précède, on a donc : $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Ce qui implique que : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$.

Exercice 52.2

On résout sur $\mathbb{R}_+$ l'équation : $f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x$.
S'agissant de réels positifs, on a : $\sqrt{1+x} = x \iff 1 + x = x^2 \iff x^2 - x - 1 = 0$.
Le discriminant du trinôme du second degré apparaissant dans les calculs est $\Delta = 5$, donc le trinôme admet deux racines : $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Or $5 > 1$, donc $\sqrt{5} > \sqrt{1} = 1$, donc $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$.
Finalement, pour $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $f(x) = x \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Ainsi il existe un unique réel positif α tel que $f(\alpha) = \alpha$, à savoir $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2 f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
On a : $1 + x \geqslant 1$, donc par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient : $\sqrt{1+x} \geqslant 1$.
Ainsi $2\sqrt{1+x} \geqslant 2$, et par passage à l'inverse avec des réels strictement positifs on trouve l'encadrement : $0 \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2}$.
Autrement dit on a établi : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

3 f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée y est bornée, donc on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \left|f(b) - f(a)\right| \leqslant \frac{1}{2}|b - a|$$

On pose $a = \alpha$ ($\in \mathbb{R}_+$ par définition) et $b = u_n$ ($\in \mathbb{R}_+$ d'après l'énoncé), d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f(u_n) - f(\alpha)\right| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

ce qui se simplifie en :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

4 On prouve l'inégalité par récurrence sur n en procédant comme dans l'exercice 35.3 dans le cas particulier où $k = \frac{1}{2}$ et $\ell = \alpha$.

5 On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\alpha|$.

Comme $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, on a : $\left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi par encadrement : $|u_n - \alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

56.1

Notons tout d'abord que les quatre fonctions à intégrer sont continues sur le segment considéré, donc les quatre intégrales existent. De gauche à droite :

1 On a : $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{1}{x \times x^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 x^{-3/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right]_1^4$.

Il vient : $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^4 = \left(-\frac{2}{\sqrt{4}}\right) - \left(-\frac{2}{\sqrt{1}}\right) = -1+2 = 1$.

2 On reconnaît la forme « $u' \times u$ » avec $u(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$.
Comme une primitive de $u' \times u$ est $\frac{u^2}{2}$, il vient :

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\big(\ln(x)\big)^2}{2}\right]_1^e = \frac{\big(\ln(e)\big)^2}{2} - \frac{\big(\ln(1)\big)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

3 On réécrit l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/4} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

On reconnaît alors la forme « $\frac{u'}{u}$ » avec $u(x) = \cos(x)$ et $u'(x) = -\sin(x)$.
Comme une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(|u|)$, il vient :

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\Big[\ln\big(|\cos(x)|\big)\Big]_0^{\pi/4} = -\left(\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1)\right) = \frac{\ln(2)}{2}$$

puisque $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln\left(\frac{2^{1/2}}{2}\right) = \ln(2^{-1/2}) = -\frac{1}{2}\ln(2)$.

4 On a : $x+1 \leqslant 0$ si $x \leqslant -1$, et $x+1 \geqslant 0$ si $x \geqslant -1$.
Ainsi : $|x+1| = -(x+1)$ si $x \leqslant -1$, et $|x+1| = x+1$ si $x \geqslant -1$.
On découpe alors l'intégrale en -1 à l'aide de la relation de Chasles :

$$\int_{-2}^2 |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} |x+1|\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^2 |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -(x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^2 (x+1)\,\mathrm{d}x$$

On en déduit que : $\displaystyle\int_{-2}^2 |x+1|\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$.

Exercice 56.2

1 Pour $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, on a : $\dfrac{a}{(2t-1)^2} + \dfrac{b}{2t-1} = \dfrac{a + b \times (2t-1)}{(2t-1)^2} = \dfrac{2bt + (a-b)}{(2t-1)^2}$.

L'égalité demandée est vérifiée pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ si le numérateur est égal à $-2t+2$.
Il suffit donc d'avoir $2b = -2$ et $a - b = 2$, c'est-à-dire $b = -1$ et $a = 2 + b = 1$.

2 Comme $2t - 1 \neq 0$ si $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, la fonction à intégrer est continue sur $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ et l'intégrale existe. Avec la question précédente et la linéarité de l'intégration, il vient :

$$\int_0^{1/4} \frac{2(1-t)}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/4} \frac{1}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{1/4} \frac{1}{2t-1}\,\mathrm{d}t$$

On fait apparaître les formes « $\frac{u'}{u^2}$ » et « $\frac{u'}{u}$ » :

$$\int_0^{1/4} \frac{2(1-t)}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \frac{2}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \frac{2}{2t-1}\,\mathrm{d}t$$

On obtient :

$$\int_0^{1/4} \frac{2(1-t)}{(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times \left[-\frac{1}{2t-1}\right]_0^{1/4} - \frac{1}{2} \times \Big[\ln\big(|2t-1|\big)\Big]_0^{1/4} = \cdots = \frac{1+\ln(2)}{2}$$

p 247

tout d'abord que les deux fonctions à intégrer sont continues sur le segment consi- donc les deux intégrales existent. De gauche à droite :

On pose $u = 2t - 1$ et on suit les étapes suivantes :

— On exprime l'ancienne variable t en fonction de la nouvelle variable u.
On a : $t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$.

— On calcule la dérivée de t par rapport à u, donnée par : $\frac{dt}{du} = \frac{1}{2}$. Ainsi : $dt = \frac{1}{2}\,du$.

— Nouvelles bornes : $t = 0$ donne $u = 0 - 1 = -1$, et $t = \frac{1}{4}$ donne $u = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

En remarquant que $2t = u + 1$, on obtient :

$$\int_0^{1/4} \frac{2(1-t)}{(2t-1)^2}\,dt = \int_0^{1/4} \frac{2-2t}{(2t-1)^2}\,dt = \int_{-1}^{-1/2} \frac{2-(u+1)}{u^2} \times \left(\frac{1}{2}\,du\right)$$

En scindant la fraction puis avec la linéarité de l'intégration, il vient ensuite :

$$\int_0^{1/4} \frac{2(1-t)}{(2t-1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{-1/2} \frac{1-u}{u^2}\,du = \frac{1}{2} \times \left(\int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{u^2}\,du - \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{u}\,du\right)$$

Ainsi :

$$\int_0^{1/4} \frac{2(1-t)}{(2t-1)^2}\,dt = \frac{1}{2} \times \left(\left[-\frac{1}{u}\right]_{-1}^{-1/2} - \Big[\ln(|u|)\Big]_{-1}^{-1/2}\right)$$

Finalement :

$$\int_0^{1/4} \frac{2(1-t)}{(2t-1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{-1}\right) - \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1)\right)\right) = \frac{1+\ln(2)}{2}$$

On pose $u = \cos(t)$ et on suit les étapes suivantes :

— Plutôt que d'exprimer l'ancienne variable t en fonction de la nouvelle variable (ce qui n'est pas possible avec les fonctions du programme officiel), on calcule la dérivée de u par rapport à t.
On obtient : $\frac{du}{dt} = -\sin(t)$, donc : $du = -\sin(t)\,dt$.
Ainsi : $\sin(t)\,dt = -du$.

— Nouvelles bornes : $t = 0$ donne $u = \cos(0) = 1$, et $t = \frac{\pi}{2}$ donne $u = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

En remarquant que $1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$, on obtient :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{2-\sin^2(t)}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2(t)} \times \big(\sin(t)\,dt\big) = \int_1^0 \frac{1}{1+u^2} \times (-du)$$

Le facteur -1 permet de changer l'ordre des bornes, et il vient :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{2-\sin^2(t)}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = \Big[\operatorname{Arctan}(u)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

1 On a : $I_0 = \int_1^e x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3-1}{3}$.

Pour calculer $I_1 = \int_1^e x^2 \ln(x)\,dx$, il faut effectuer une intégration par parties.
On a vu dans la fiche 57 que : $I_1 = \frac{2e^3+1}{9}$.

2 La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{e} - \ln(x)$ est dérivable sur $[1, e]$ et on a :

$$\forall x \in [1, e],\quad f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x-e}{e \times x} \leqslant 0$$

Ainsi :

x	1 $\quad$ e
f	$\searrow$ 0

$$f(e) = \frac{e}{e} - \ln(e) = 1 - 1 = 0$$

On a donc : $\forall x \in [1, e]$, $f(x) \geqslant 0$, d'où : $\forall x \in [1, e]$, $\ln(x) \leqslant \frac{x}{e}$.
De plus $\ln(x) \geqslant 0$ sur $[1, e]$, donc par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [1, e],\ 0 \leqslant \big(\ln(x)\big)^n \leqslant \frac{x^n}{e^n}$$

En multipliant par x^2 ($\geqslant 0$), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [1, e],\ 0 \leqslant x^2\big(\ln(x)\big)^n \leqslant \frac{x^{n+2}}{e^n}$$

Enfin par croissance de l'intégrale (avec $1 \leqslant e$), on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n = \int_1^e x^2\big(\ln(x)\big)^n\,dx \leqslant \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n}\,dx = \frac{1}{e^n} \times \left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_1^e$$

Après simplification, il reste : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{(n+3)\times e^n}$.
Comme $\frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{(n+3)\times e^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il vient par encadrement : $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose dans l'intégrale $3I_{n+1}$:

$$u(x) = \big(\ln(x)\big)^{n+1} \quad \rightsquigarrow \quad u'(x) = (n+1) \times \big(\ln(x)\big)^n \times \tfrac{1}{x}$$
$$v'(x) = 3x^2 \quad \rightsquigarrow \quad v(x) = x^3$$

u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} 3I_{n+1} &= \int_1^e 3x^2 \times \big(\ln(x)\big)^{n+1}\,dx \\ &= \Big[x^3 \times \big(\ln(x)\big)^{n+1}\Big]_1^e - \int_1^e x^3 \times \left((n+1) \times \big(\ln(x)\big)^n \times \frac{1}{x}\right)dx \\ &= \Big(e^3\big(\ln(e)\big)^{n+1} - 1^3\big(\ln(1)\big)^{n+1}\Big) - (n+1)\int_1^e x^2\big(\ln(x)\big)^n\,dx \end{aligned}$$

Il reste bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3I_{n+1} = e^3 - (n+1)I_n$.

4 On réorganise les termes : $\forall n \in \mathbb{N},\ nI_n = e^3 - I_n - 3I_{n+1}$.

Or : $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc on a aussi : $I_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi : $nI_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^3$.

Exercice 60.1

La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et $e \in \mathbb{R}_+^*$. Par théorème, la primitive F de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en e est alors donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \int_e^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_e^x 1 \times \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :
$$\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & \rightsquigarrow\ u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & \rightsquigarrow\ v(t) = t \end{array}$$

u et v étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $e, x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$F(x) = \int_e^x 1 \times \ln(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t \times \ln(t)\Big]_e^x - \int_e^x t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = (x\ln(x) - e) - \int_e^x 1\,\mathrm{d}t$$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \big(x\ln(x) - e\big) - (x - e) = x\ln(x) - x$.

On pourra retenir que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 60.2

1 La fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{e^x+1}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $1 \in \mathbb{R}$.
Par théorème, la fonction F est donc la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.
En particulier F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x) = \frac{x-1}{e^x+1}$.
$F'(x)$ est du signe de $x - 1$ sur $\mathbb{R}$, d'où :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2 On a : $\forall t \geqslant 1,\ e^t + 1 \geqslant e^t > 0$, donc par inverse : $\forall t \geqslant 1,\ 0 \leqslant \frac{1}{e^t+1} \leqslant \frac{1}{e^t} = e^{-t}$.
De plus : $\forall t \geqslant 1,\ 0 \leqslant t - 1 \leqslant t$, donc par produit d'inégalités de nombres positifs :

$$\forall t \in [1, +\infty[,\ \frac{t-1}{e^t+1} \leqslant te^{-t}$$

255

Exercice 60.3

1 La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^4+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque : $\forall t \in \mathbb{R},\ t^4 + 1 \neq 0$.
On en déduit que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{t^4+1}\,dt$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi G est définie sur $\mathbb{R}$.

2 La fonction G est définie sur $\mathbb{R}$, intervalle centré en 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule $G(-x)$ à l'aide du changement de variable $u = -t$.

On obtient $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$, puis :

$$G(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_{-(-x)}^{-(-2x)} \frac{1}{(-u)^4+1} \times (-\,\mathrm{d}u) = -\int_x^{2x} \frac{1}{u^4+1}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(-x) = -G(x)$, donc G est une fonction impaire.

3) f est continue sur $\mathbb{R}$, donc f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

En tant que primitive de f sur $\mathbb{R}$, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Par composition et différence, la fonction G est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Par dérivation de fonctions composées, il vient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = F'(2x) \times 2 - F'(x)$$

F étant une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a $F' = f$, d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2 \times \frac{1}{(2x)^4+1} - \frac{1}{x^4+1} = \frac{1 - 14x^4}{(16x^4+1)(x^4+1)}$$

$G'(x)$ est du signe de $1 - 14x^4$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par stricte croissance de $u \mapsto u^4$ sur $\mathbb{R}_+$, on a alors :

$$G'(x) > 0 \iff 1 - 14x^4 > 0 \iff x^4 < \frac{1}{14} \iff x < \left(\frac{1}{14}\right)^{1/4}$$

Ainsi :

x	0		$14^{-1/4}$		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	0	$-$	
G	0	$\nearrow$		$\searrow$	

4) Soit $x \geqslant 0$. Si $t \in [x, 2x]$, alors $2x \geqslant t \geqslant x$, donc : $16x^4 + 1 \geqslant t^4 + 1 \geqslant x^4 + 1 > 0$.

Par inverse : $\forall t \in [x, 2x],\ \frac{1}{16x^4+1} \leqslant \frac{1}{t^4+1} \leqslant \frac{1}{x^4+1}$.

Par croissance de l'intégrale (avec $x \leqslant 2x$ si $x \geqslant 0$), il vient :

$$\forall x \geqslant 0,\ \frac{1}{16x^4+1}\int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^4+1}\int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t$$

En calculant les intégrales, on obtient : $\forall x \in [0,+\infty[,\ \dfrac{x}{16x^4+1} \leqslant G(x) \leqslant \dfrac{x}{x^4+1}$.

5) Or : $\dfrac{x}{16x^4+1} = \dfrac{1}{16x^3+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{x}{x^4+1} = \dfrac{1}{x^3+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Donc par encadrement : $G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

La fonction G étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère. On a donc nécessairement : $G(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

Exercice 61.2

1 On écrit S_n sous la forme d'une somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

En posant $f : x \mapsto \sqrt{x}$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Or f est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

On calcule : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\times x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

Ainsi : $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{2}{3}$.

2 On écrit de même T_n sous la forme d'une somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n\times\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

En posant $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Or f est continue sur $[0,1]$, donc d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a :

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \cdots = \ln(2)$$

Exercice 63.1

1 On modélise une équipe par une partie à 8 éléments de l'ensemble des 15 volontaires (il n'y a pas d'ordre et les répétitions sont impossibles).
Il y a donc $\binom{15}{8} = \binom{15}{15-8} = \binom{15}{7} = \frac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 13\times11\times5\times3\times3 = 6435$ équipes possibles.

2 Il y a une seule équipe non mixte possible : celle constituée des 8 garçons.
Ainsi $6435 - 1 = 6434$ équipes sont mixtes.

3 Une équipe paritaire est caractérisée par :
- le choix de 4 filles parmi les 7 filles volontaires : $\binom{7}{4} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$ possibilités ;
- le choix de 4 garçons parmi les 8 volontaires : $\binom{8}{4} = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$ possibilités.

Il y a donc $35 \times 70 = 2450$ équipes paritaires.

Exercice 63.2

1 On modélise un tirage par une partie à 2 éléments de l'ensemble des $2n$ boules de l'urne (il n'y a pas d'ordre et les répétitions sont impossibles).
Il y a donc $\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ tirages possibles

2 Il y a n numéros distincts, donc n tirages donnent une paire.
Il y a équiprobabilité, ainsi la probabilité d'obtenir une paire est donnée par le quotient du nombre de tirages donnant une paire par le nombre total de tirages.
Ainsi la probabilité d'obtenir une paire est : $\dfrac{n}{n(2n-1)} = \dfrac{1}{2n-1}$.

Exercice 64.1

1 S'agissant de 5 tirages successifs d'une boule sans remise dans une urne contenant 8 boules, on modélise un résultat par une 5-liste d'éléments distincts de l'ensemble des 8 boules de l'urne (il y a un ordre induit par la succession des tirages et les répétitions sont impossibles puisqu'il n'y a pas remise).
Il y a donc $\frac{8!}{(8-5)!} = 8\times7\times6\times5\times4 = 6720$ résultats différents.

2 Un résultat donnant exactement 3 boules à numéro pair est caractérisé par :
- le choix des rangs d'apparition des 3 boules à numéro pair, c'est-à-dire le choix simultané de 3 rangs parmi les 5 rangs possibles (puisqu'il y a 5 tirages) : il y a $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$ possibilités ;
(Il n'est pas nécessaire de choisir les rangs d'apparition des 2 boules à numéro impair : elles seront obtenues aux rangs où l'on n'obtient pas de boule à numéro pair !)
- le choix des 3 boules à numéro pair et de leur ordre d'apparition, c'est-à-dire le choix d'une 3-liste d'éléments distincts de l'ensemble des 4 boules à numéro pair de l'urne : il y a $\frac{4!}{(4-3)!} = 4\times3\times2 = 24$ possibilités ;

- le choix des 2 boules à numéro impair et de leur ordre d'apparition, c'est-à-dire le choix d'une 2-liste d'éléments distincts de l'ensemble des 4 boules à numéro impair de l'urne : il y a $\frac{4!}{(4-2)!} = 4 \times 3 = 12$ possibilités.

Finalement, $10 \times 24 \times 12 = 2880$ résultats donnent exactement 3 boules à numéro pair.

3 On remarque, comme les tirages se font sans remise, que les numéros obtenus lors des 5 tirages successifs sont tous différents. Ainsi un résultat donnant des numéros dans l'ordre croissant est aussi un résultat donnant des numéros dans l'ordre strictement croissant. Un tel résultat est caractérisé par :

- le choix sans ordre des 5 numéros différents obtenus lors des tirages, c'est-à-dire le choix de 5 numéros non ordonnés parmi 8 numéros possibles : il y a $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$ possibilités ;
- le choix de l'ordre dans lequel ces numéros sont obtenus, mais comme l'ordre est imposé (strictement croissant), il n'y a qu'une possibilité.

Finalement 56 résultats donnent des numéros dans l'ordre croissant.

Exercice 64.2

1 Avec la modélisation donnée par l'énoncé il y a p^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

2 Une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ est injective si, par définition, tout élément de l'espace d'arrivée admet au plus un antécédent dans l'ensemble de départ.
Ainsi une application injective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ donne exactement n images distinctes dans $[\![1,p]\!]$ et on en déduit que :

- Si $n > p$, alors il n'y a pas d'application injective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.
- Si $n \leqslant p$, alors une application injective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ est modélisée par la n-liste d'éléments distincts de $[\![1,p]\!]$ donnant les images des éléments de $[\![1,n]\!]$. Il y a donc $\frac{p!}{(p-n)!}$ applications injectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

3 Une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ est bijective si, par définition, tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un et un seul antécédent. On en déduit que :

- Si $n \neq p$, alors il n'y a pas d'application bijective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.
- Si $n = p$, alors une application bijective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est modélisée par la n-liste d'éléments distincts de $[\![1,n]\!]$ donnant les images des éléments de $[\![1,n]\!]$. Il y a donc $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$ applications bijectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Exercice 67.1

Il est indispensable d'introduire les événements N_i : « Obtenir une boule noire au i-ième tirage » et R_i : « Obtenir une boule rouge au i-ième tirage ».

1 On a : $C = (R_1 \cap R_n) \cup (N_1 \cap N_n)$.
Par incompatibilité, il vient : $P(C) = P(R_1 \cap R_n) + P(N_1 \cap N_n)$.
Par indépendance des tirages (car il y a remise), on obtient :

$$P(C) = P(R_1)\,P(R_n) + P(N_1)\,P(N_n) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

On considère directement l'événement contraire : $\overline{D} = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n$.
Par indépendance des tirages, il vient : $P(\overline{D}) = P(N_1)\,P(N_2)\,\ldots\,P(N_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Ainsi : $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2 Il s'agit de calculer $P(F \cup G \cup H)$.
Les événements F et G peuvent se réaliser simultanément, donc les événements F, G et H ne sont pas deux à deux incompatibles.
Notons de plus que calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{F} \cap \overline{G} \cap \overline{H}$ est difficile, car les événements $\overline{F}$, $\overline{G}$ et $\overline{H}$ ne sont a priori pas indépendants (des tirages communs apparaissent dans leur définition) et les probabilités conditionnelles les liant ne sont pas évidentes à établir.
Appliquons donc la formule du crible :

$$\begin{aligned} P(F \cup G \cup H) &= P(F) + P(G) + P(H) - P(F \cap G) \\ &\quad - P(F \cap H) - P(G \cap H) + P(F \cap G \cap H) \end{aligned}$$

Par indépendance des tirages : $P(F) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)\,P(N_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

De même : $P(G) = P(N_2 \cap N_3) = \frac{1}{9}$ et $P(H) = P(R_3 \cap R_4) = \frac{4}{9}$.

Puis : $P(F \cap G) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.

De la même façon : $P(F \cap H) = P(N_1 \cap N_2 \cap R_3 \cap R_4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{81}$.

Enfin les événements $G \cap H$ et $F \cap G \cap H$ sont impossibles, car le troisième tirage ne peut pas amener à la fois une boule noire et une boule rouge.
Il vient :

$$P(F \cup G \cup H) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} - \frac{1}{27} - \frac{4}{81} - 0 + 0 = \frac{9+9+36-3-4}{81} = \frac{47}{81}$$

EXERCICE 68.1

On note A_k : « Choisir l'urne $\mathcal{U}_k$ » et R : « Tirer une boule rouge ».

D'après l'énoncé, on a : $P(A_k) = \dfrac{1}{n}$ et $P_{A_k}(R) = \dfrac{k}{n+1}$.

1 On observe que l'expérience aléatoire considérée se décompose en deux étapes :

1. On choisit une urne au hasard. La famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements qui décrit les possibilités résultant de cette première étape.
2. On tire une boule de l'urne choisie, dont le contenu dépend du résultat de l'étape 1.

On applique alors la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ de probabilités non nulles :

$$P(R) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(R) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k$$

Il vient : $P(R) = \dfrac{1}{n(n+1)} \times \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1}{2}$.

2 Il s'agit ici de calculer $P_R(A_k)$.

On n'a pas d'autre choix que d'appliquer la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_R(A_k) = \frac{P(A_k \cap R)}{P(R)} = \frac{P(A_k)P_{A_k}(R)}{P(R)} = \frac{\dfrac{k}{n+1} \times \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

EXERCICE 68.2

1 On commence par lancer la pièce A, donc l'événement A_1 est certain.

Ainsi : $a_1 = P(A_1) = 1$.

De plus pour lancer à nouveau la pièce A au deuxième lancer, il faut qu'on ait obtenu Pile au premier lancer.

Ainsi : $a_2 = P(A_2) = P\big(\text{« Obtenir Pile avec la pièce } A\text{ »}\big) = \dfrac{1}{2}$.

2 Soit $n \geqslant 1$. On considère l'enchaînement des deux étapes suivantes :

1. On lance une n-ième fois l'une des deux pièces : lors de ce lancer on a pu utiliser la pièce A comme la pièce B, donc $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'événements qui décrit les possibilités pour cette première étape.
2. On effectue un $(n+1)$-ième lancer : selon la pièce lancée à l'étape précédente et son résultat (Pile ou Face), on lancera la pièce A ou la pièce B lors de ce $(n+1)$-ième lancer.

À partir du deuxième lancer, il est possible de lancer chacune des deux pièces, donc $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles si $n \geqslant 2$.
La formule des probabilités totales donne alors :

$$\forall n \geqslant 2,\ \ P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

Si l'on obtient Pile, on relance la même pièce, et sinon on lance l'autre pièce.

Ainsi : $P_{A_n}(A_{n+1}) = P\big(\text{« Obtenir Pile avec la pièce } A \text{ au } n\text{-ième lancer »}\big) = \dfrac{1}{2}$,

et : $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P\big(\text{« Obtenir Face avec la pièce } B \text{ au } n\text{-ième lancer »}\big) = \dfrac{2}{3}$.

Comme de plus $P(A_n) = a_n$ et $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n) = 1 - a_n$, il vient :

$$\forall n \geqslant 2,\ \ a_{n+1} = \frac{1}{2}\,a_n + \frac{2}{3}\,(1 - a_n) = -\frac{1}{6}\,a_n + \frac{2}{3}$$

Enfin d'après la question précédente : $-\dfrac{1}{6}\,a_1 + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = a_2$.

On en déduit que la formule générale reste valable pour $n = 1$.

3 La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique.

Point fixe : $c = -\dfrac{1}{6}c + \dfrac{2}{3} \iff c = \dfrac{4}{7}$.

On pose $v_n = a_n - \dfrac{4}{7}$ et on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{4}{7} = -\frac{1}{6}\,a_n + \frac{2}{3} - \frac{4}{7} = -\frac{1}{6}\,a_n + \frac{2}{21}$$

Il vient :

$$v_{n+1} = -\frac{1}{6}\left(v_n + \frac{4}{7}\right) + \frac{2}{21} = -\frac{1}{6}\,v_n$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{6}$.

Comme $v_1 = a_1 - \dfrac{4}{7} = 1 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7}$, on a : $\forall n \geqslant 1,\ v_n = \dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$.

Et finalement :

$$\forall n \geqslant 1,\ \ a_n = v_n + \frac{4}{7} = \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$$

EXERCICE 69.1

Pour commencer, comme les tirages se font sans remise :

- Au minimum on tire la boule blanche dès le premier tirage, et dans ce cas X prend la valeur 0.
- Au maximum on tire d'abord toutes les boules rouges avant d'obtenir la boule blanche, et dans ce cas X prend la valeur n.
- Les cas intermédiaires sont possibles.

On a donc : $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

On fixe à présent $k \in [\![0, n]\!]$ et on calcule $P(X = k)$.
Pour cela, on introduit les événements B_i : « Obtenir une boule blanche au i-ième tirage » et R_i : « Obtenir une boule rouge au i-ième tirage ».

On a : $P(X = 0) = P(B_1) = \dfrac{1}{n+1}$.

De plus, si $k \in [\![1, n]\!]$, alors X prend la valeur k si et seulement si on obtient k boules rouges avant la boule blanche. Ainsi :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad [X = k] = R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1}$$

Comme $P\big(R_1 \cap \cdots \cap R_k\big) \neq 0$ (car $k \leqslant n$), on peut appliquer la formule des probabilités composées :

$$P(X = k) = P(R_1)\, P_{R_1}(R_2)\, P_{R_1 \cap R_2}(R_3)\, \ldots\, P_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k)\, P_{R_1 \cap \cdots \cap R_k}(B_{k+1})$$

Sachant $R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}$, il reste une boule blanche et $n - (k-1)$ boules rouges dans l'urne.
Sachant $R_1 \cap \cdots \cap R_k$, il reste une boule blanche et $n - k$ boules rouges dans l'urne.
On peut donc expliciter pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$P(X = k) = \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n+1}$$

puisque les fractions se simplifient de proche en proche.
On observe que la formule reste valable pour $k = 0$.

On a donc : $\forall\, k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

EXERCICE 69.2

1 Tout d'abord comme $k \leqslant n$:

- Au minimum on tire 0 boule blanche (et donc k boules noires).
- Au maximum on tire k boules blanches (et donc 0 boule noire).
- Les cas intermédiaires sont possibles.

On a donc : $X(\Omega) = [\![0, k]\!]$.

On fixe à présent $i \in [\![0, k]\!]$ et on calcule $P(X = i)$.

D'après le cours, il y a $\dbinom{2n}{k}$ façons de choisir simultanément k éléments dans un ensemble à $2n$ éléments distincts. En considérant que les boules de l'urne sont toutes distinctes (par exemple en les numérotant), il y a donc $\dbinom{2n}{k}$ résultats possibles pour l'expérience considérée, et tous ces résultats sont équiprobables.

Pour choisir un résultat favorable à $[X = i]$:

- On choisit les i boules blanches obtenues : il y a $\dbinom{n}{i}$ choix possibles.
- Puis on choisit les $k - i$ boules noires obtenues : il y a $\dbinom{n}{k-i}$ choix possibles.

Il y a donc $\dbinom{n}{i} \times \dbinom{n}{k-i}$ résultats favorables à $[X = i]$, d'où pour tout $i \in [\![0, k]\!]$:

$$P(X = i) = \frac{\text{Nombre de résultats favorables à } [X = i]}{\text{Nombre total de résultats}} = \frac{\dbinom{n}{i}\dbinom{n}{k-i}}{\dbinom{2n}{k}}$$

2 On sait que : $\displaystyle\sum_{i \in X(\Omega)} P(X = i) = 1$, donc : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{\dbinom{n}{i}\dbinom{n}{k-i}}{\dbinom{2n}{k}} = 1$.

Comme $\dbinom{2n}{k}$ ne dépend pas de l'indice i, il vient : $\displaystyle\frac{1}{\dbinom{2n}{k}} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i} = 1$.

D'où l'égalité demandée : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k}$.

EXERCICE 71.1

On a : $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n+1} = 0 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2$.

Il vient : $E(X^2) = \dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{n(2n+1)}{6}$, puis :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n+2)}{12}$$

EXERCICE 71.2

1 Comme dans l'exemple traité, on trouve $E(X^2) = \dfrac{39}{14}$ puis $V(X) = \dfrac{15}{28}$.

2 **a.** Comme X donne la contribution en $+1$ au total de points et Y donne la contribution en -1, on a : $G = X - Y$.

b. $X + Y$ donne le nombre total de boules tirées, autrement dit : $X + Y = 3$.
On a donc $Y = 3 - X$ et :

$$G = X - Y = X - (3 - X) = 2X - 3$$

c. Il vient : $E(G) = E(2X - 3) = 2E(X) - 3 = 2 \times \dfrac{3}{2} - 3 = 0$.

De la même manière : $V(G) = V(2X - 3) = 2^2 V(X) = 4 \times \dfrac{15}{28} = \dfrac{15}{7}$.

On pouvait s'attendre à ce que le gain moyen soit nul, puisqu'il y a autant de boules blanches que de boules rouges dans l'urne : les contributions en $+1$ point et en -1 point se compensent donc en moyenne.

EXERCICE 74.1

1 On applique la « caractérisation en trois points » :

- Par définition, on a $F \subset \mathbb{R}^3$.
- Si $x = y = z = 0$, alors on a : $2x - y - 3z = 2 \times 0 - 0 - 3 \times 0 = 0$.
  On en déduit que le vecteur nul $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à F.
- Montrons enfin que F est stable par combinaison linéaire.
  Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $u, v \in F$.
  Montrons que $w = \alpha u + \beta v$ appartient encore à F.
  Autrement dit, en notant $w = (x'', y'', z'')$, montrons que : $2x'' - y'' - 3z'' = 0$.
  En notant $u = (x, y, z)$, on sait que $u \in F$, donc : $2x - y - 3z = 0$.
  En notant $v = (x', y', z')$, on sait que $v \in F$, donc : $2x' - y' - 3z' = 0$.
  On calcule :

$$w = \alpha u + \beta v = \alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') = (\alpha x + \beta x' \,,\, \alpha y + \beta y' \,,\, \alpha z + \beta z')$$

Alors :

$$\begin{aligned} 2x'' - y'' - 3z'' &= 2(\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') - 3(\alpha z + \beta z') \\ &= \alpha(2x - y - 3z) + \beta(2x' - y' - 3z') \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $w = \alpha u + \beta v \in F$, ce qui prouve que F est stable par combinaison linéaire.

Des trois points précédents, on déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2 Le triplet $(1, -1, 1)$ appartient à F puisque : $2 \times 1 - (-1) - 3 \times 1 = 0$.
Plus généralement, si $x, z \in \mathbb{R}$, alors le triplet $(x, 2x - 3z, z)$ appartient à F.
Le triplet $(1, 1, 1)$ n'appartient pas à F puisque : $2 \times 1 - 1 - 3 \times 1 = -2 \neq 0$.

EXERCICE 74.2

On applique la « caractérisation en trois points » à l'ensemble $\mathcal{S}_n$:

- Par définition, on a $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si 0_n désigne la matrice nulle carrée d'ordre n, alors : ${}^t0_n = 0_n$.
  On en déduit que le vecteur nul 0_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n$.
- Montrons enfin que $\mathcal{S}_n$ est stable par combinaison linéaire.
  Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $M, N \in \mathcal{S}_n$.
  Montrons que $\alpha M + \beta N$ appartient encore à $\mathcal{S}_n$, c'est-à-dire que :

$${}^t(\alpha M + \beta N) = \alpha M + \beta N$$

On sait que M et N appartiennent à $\mathcal{S}_n$, donc : ${}^tM = M$ et ${}^tN = N$.
Par linéarité de la transposition, on a alors :

$${}^t(\alpha M + \beta N) = \alpha\, {}^tM + \beta\, {}^tN = \alpha M + \beta N$$

Ainsi $\alpha M + \beta N \in \mathcal{S}_n$, ce qui prouve que $\mathcal{S}_n$ est stable par combinaison linéaire.

Des trois points précédents, on déduit que $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On montre de la même manière que $\mathcal{A}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 74.3

On applique la « caractérisation en trois points » :

- Par définition, on a $F \subset \mathbb{R}_2[X]$.
- Si P est le polynôme nul, alors P' est aussi le polynôme nul et : $P(0) = P'(1) = 0$.
  On en déduit que le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ appartient à F.
- Montrons enfin que F est stable par combinaison linéaire.
  Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $P, Q \in F$.
  Montrons que $R = \alpha P + \beta Q$ appartient encore à F, c'est-à-dire que : $R(0) = R'(1) = 0$.
  On sait que P et Q appartiennent à F, donc : $P(0) = Q(0) = P'(1) = Q'(1) = 0$.
  D'une part par définition de l'évaluation en un point :

$$R(0) = (\alpha P + \beta Q)(0) = \alpha P(0) + \beta Q(0) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$$

D'autre part par linéarité de la dérivation :

$$R'(1) = (\alpha P + \beta Q)'(1) = \alpha P'(1) + \beta Q'(1) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$$

Ainsi $R = \alpha P + \beta Q \in F$, ce qui prouve que F est stable par combinaison linéaire.

Des trois points précédents, on déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 74.4

On applique la « caractérisation en trois points » :

- Par définition, on a $F \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
- Si ω désigne la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, alors les dérivées première ω' et seconde ω'' sont aussi des fonctions nulles sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \omega''(x) + 2\omega'(x) + \omega(x) = 0 + 0 + 0 = 0$$

On en déduit que le vecteur nul ω de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ appartient à F.

- Montrons enfin que F est stable par combinaison linéaire.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $f, g \in F$.
Montrons que $h = \alpha f + \beta g$ appartient encore à F, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) + 2h'(x) + h(x) = 0$$

On sait que f et g appartiennent à F, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 2f'(x) + f(x) = g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 0$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& h''(x) + 2h'(x) + h(x) \\
= \ & (\alpha f + \beta g)''(x) + 2(\alpha f + \beta g)'(x) + (\alpha f + \beta g)(x) \\
\underset{(\star)}{=} \ & \big(\alpha f''(x) + \beta g''(x)\big) + 2\big(\alpha f'(x) + \beta g'(x)\big) + \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) \\
= \ & \alpha\big(f''(x) + 2f'(x) + f(x)\big) + \beta\big(g''(x) + 2g'(x) + g(x)\big) \\
= \ & \alpha \times 0 + \beta \times 0 \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

$(\star)$ Par linéarité de la dérivation.
Ainsi $\alpha f + \beta g \in F$, ce qui prouve que F est stable par combinaison linéaire.

Des trois points précédents, on déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Exercice 84.1

1 Attention, il n'est pas possible de composer par ln dans l'équivalent : $n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
En factorisant n dans le logarithme, on obtient :

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)$$

Or $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(\ln(n)\big)$.
On en déduit que : $u_n = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2 Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a : $\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
De plus : $\sin(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(\ln(n)\big)$ puisque $\big(\sin(n)\big)$ est bornée et $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Ainsi par quotient : $v_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\sin(n)+\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(n)} = \frac{1}{n\ln(n)}$.

3 On écrit : $w_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 - 2\left[\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2\right)$.
Comme $-2\left[\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\right]^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a par un équivalent usuel :

$$w_n = \ln\left(1 - 2\left[\sin\left(\tfrac{1}{2n}\right)\right]^2\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\left[\sin\left(\tfrac{1}{2n}\right)\right]^2$$

Enfin, on a $\frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc : $\sin\left(\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
Il vient : $w_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\left[\frac{1}{2n}\right]^2 = -\frac{1}{2n^2}$.

Exercice 84.2

La relation donnée par l'énoncé se réécrit en isolant nI_n : $\forall n \in \mathbb{N},\ nI_n = e^3 - I_n - 3I_{n+1}$.
Or d'après l'énoncé, on a : $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc on a aussi : $I_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On en déduit que : $nI_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^3$, c'est-à-dire : $\frac{I_n}{\frac{e^3}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
On a ainsi montré que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^3}{n}$.

Exercice 84.3

La relation donnée par l'énoncé se réécrit : $\forall n \geqslant 3$, $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$.
Or d'après l'énoncé : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc d'une part : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1$, et d'autre part : $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
Finalement, par transitivité de l'équivalence, on a : $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 86.1

1 On a d'après le cours : $e^t - 1 \underset{t\to 0}{=} t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$.

Ainsi en remplaçant t par $-x$ (qui tend aussi vers 0), il vient :

$$e^{-x} - 1 \underset{x\to 0}{=} -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

De même, on a d'après le cours : $\dfrac{1}{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1 - t + t^2 + o(t^2)$.

Ainsi en remplaçant t par x^2 (qui tend aussi vers 0), il vient :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4) = 1 - x^2 + o(x^3)$$

Enfin par produit, on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3 + o(x^3)$$

Après simplification, il reste :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3)$$

2 On a : $\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1 + \dfrac{t}{2} + \dfrac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} t^2 + o(t^2) = 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{8} + o(t^2)$.

Ainsi en remplaçant t par $-x^2$ (qui tend aussi vers 0), il vient :

$$\sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

De même on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-1/2} \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{t}{2} + \frac{-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2} t^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o(t^2)$$

Ainsi en remplaçant t par x^2 (qui tend aussi vers 0), il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$$

En calculant la différence, on a finalement : $g(x) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$.

3 On a : $\dfrac{\sin(t)}{t} - \cos(t) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)}{t} - \left(1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^3)\right) = \dfrac{t^2}{3} + o(t^3)$.

Ainsi en remplaçant t par $\frac{1}{n}$ (qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$), il vient :

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exercice 86.2

1 On observe que : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x - x^3} = \dfrac{1}{x} \times \sin(x) \times \dfrac{1}{1-x^2}$.

En procédant comme dans l'exercice précédent, on obtient : $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + o(x^3)$.

Comme il y a un facteur $\frac{1}{x}$ dans le produit, on considère le développement limité à l'ordre $3+1=4$ du numérateur :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Finalement :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} \times \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \times \left(1 + x^2 + o(x^3)\right)$$

En développant, il vient :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) = 1 + \frac{5x^2}{6} + o(x^3)$$

2 On écrit : $\dfrac{1}{x^2+x^3} = \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+x}$.

Compte tenu du facteur $\frac{1}{x^2}$ dans le produit, on effectue un développement limité à l'ordre $2+2=4$ au numérateur :

$$\ln(1+x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4)$$

On obtient : $\ln(1+x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$.

Ainsi :

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \times \left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right)$$

On distribue le facteur $\frac{1}{x^2}$:

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \times \left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right)$$

En développant puis en simplifiant, on a finalement :

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + x - \frac{5x^2}{4} + o(x^2)$$

Exercice 87.1

1 On écrit : $n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)=n\left(e^{\frac{\ln(2)}{n}}-1\right)$.

On reconnaît un équivalent usuel : $e^{\frac{\ln(2)}{n}}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$ puisque $\frac{\ln(2)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par produit il vient finalement : $n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{\ln(2)}{n}=\ln(2)$.

Finalement : $n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

2 Traitons d'abord le dénominateur. En multipliant le développement limité à l'ordre 1 en 0 pour $\sqrt{1+x}-1$ par x^2 il vient :

$$x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right) \underset{x\to0}{=} x^2\left(\left(1+\frac{1}{2}x\right)-1+o(x)\right)=\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

On va donc faire un développement limité à l'ordre 3 en 0 du numérateur :

$$\sin(x)-x\cos(x) \underset{x\to0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^3)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Ainsi : $\dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)} \underset{x\to0}{=} \dfrac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=\dfrac{\frac{1}{3}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)}$.

Finalement : $\dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^2\left(\sqrt{1+x}-1\right)} \xrightarrow[x\to0]{} \dfrac{1/3}{1/2}=\dfrac{2}{3}$.

Exercice 87.2

1 On a l'équivalent usuel : $\ln(1+t) \underset{t\to0}{\sim} t$, donc : $\ln(1-x) \underset{x\to0}{\sim} -x$.

On a donc par quotient : $f(x)=\frac{\ln(1-x)}{x} \underset{x\to0}{\sim} \frac{-x}{x}=-1$.

Ainsi : $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} -1=f(0)$.

On en déduit que f est continue en 0.

Formons alors le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{\ln(1-x)}{x}+1}{x}=\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$$

On rappelle le développement limité usuel : $\ln(1+t) \underset{t\to0}{=} t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$.

En posant $t=-x$ (qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0), on obtient :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to0}{=} \frac{\left(-x-\frac{(-x)^2}{2}\right)+x+o(x^2)}{x^2}=\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}+o(1)$$

Ainsi : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to0]{} -\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

On pouvait raccourcir la preuve à partir du développement limité obtenu à l'ordre 1 en 0 pour f :

$$f(x)=\frac{\ln(1-x)}{x} \underset{x\to0}{=} -1-\frac{1}{2}x+o(x)$$

D'après le cours f admettant un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$ (le coefficient de x dans le développement limité).

2 Formons le taux d'accroissement de g en 0 :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{x^x-1}{x}=\frac{e^{x\ln(x)}-1}{x}$$

Par croissances comparées, on a $x\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$, donc : $e^{x\ln(x)}-1 \underset{x\to0^+}{\sim} x\ln(x)$.

Par quotient, on en déduit que :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{x\ln(x)}{x}=\ln(x)$$

Or $\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$, donc on a aussi : $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$.

Ainsi g n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice 88.1

On calcule :

$$\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)=\sum_{k=2}^{n}\left(\ln(k-1)-\ln(k)\right)$$

On reconnaît une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)=\ln(2-1)-\ln(n)=-\ln(n)$.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant2}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ diverge.

EXERCICE 88.2

1 Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $a_n = S_{2n}$ et on a :

$$a_{n+1} - a_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$$

Comme $2n+1$ est impair et $2n+2$ est pair, il vient :

$$\forall n \geqslant 1,\ a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} \leqslant 0$$

Ainsi la suite (a_n) est décroissante.
De même en posant $b_n = S_{2n+1}$, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$b_{n+1} - b_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} = \frac{1}{2n+2} + \frac{-1}{2n+3}$$

Il vient : $\forall n \geqslant 1,\ b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)} \geqslant 0$, donc (b_n) est croissante.

Enfin : $b_n - a_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{-1}{2n+1}$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.

On en déduit que les suites $(a_n) = (S_{2n})$ et $(b_n) = (S_{2n+1})$ sont adjacentes.

2 Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) étant adjacentes, on sait par théorème qu'elles convergent toutes les deux vers la même limite finie ℓ.
D'après le théorème admis en début d'exercice, on sait alors que la suite (S_n) converge aussi vers ℓ.
Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \ell$$

Par définition, cela signifie que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^k}{k}$ converge.

EXERCICE 90.1

1 On a : $\forall k \geqslant 1,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant 1$. Ainsi : $\forall k \geqslant 1,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{k2^k} \leqslant \dfrac{1}{2^k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

2 De plus $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc la série géométrique $\sum\limits_{k\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k2^k}$ converge.

En sommant les inégalités de la question précédente pour k allant de 1 à n, il vient :

$$\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Les séries associées étant convergentes, on peut passer à la limite dans les inégalités larges en faisant tendre n vers $+\infty$ et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \underset{i=k-1}{=} \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

EXERCICE 90.2

Attention, la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k!}\right)$ est à termes négatifs.

On a $\lim\limits_{k\to+\infty} -\dfrac{1}{k!} = 0$ et $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$, donc : $-\ln\left(1 - \dfrac{1}{k!}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k!}$.

De plus : $\forall k \geqslant 2,\ -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k!}\right) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{k!} \geqslant 0$.

Enfin la série exponentielle $\sum\limits_{k\geqslant 2} \dfrac{1}{k!}$ converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \left(-\ln\left(1 - \dfrac{1}{k!}\right)\right)$ converge.

La série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \ln\left(1 - \dfrac{1}{k!}\right)$ converge donc aussi.

On a :
$$\frac{\frac{\ln(k)}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = \ln(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty \quad \text{mais :} \quad \frac{\frac{\ln(k)}{k^2}}{\frac{1}{k^{3/2}}} = \frac{\ln(k)}{k^{1/2}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

D'où : $\dfrac{\ln(k)}{k^2} = o\left(\dfrac{1}{k^{3/2}}\right)$ lorsque $k \to +\infty$. De plus : $\forall k \geqslant 1,\ \dfrac{\ln(k)}{k^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{k^{3/2}} \geqslant 0$.

Enfin on sait que la série de Riemann $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^{3/2}}$ converge, puisque $\dfrac{3}{2} > 1$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\ln(k)}{k^2}$ converge.

On a $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\pi}{k^{1/4}} = 0$ et $1 - \cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, donc : $1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{k^{1/4}}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2k^{1/2}}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, on trouve que $\sum\limits_{k\geqslant 1} \left(1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{k^{1/4}}\right)\right)$ diverge.

91.2

1 Pour $k \geqslant 2$, on a :

$$u_{k-1} - u_k = \left[\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} - \ln(k-1)\right] - \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} - \ln(k)\right] = -\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

Au voisinage de 0 on a : $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, donc comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$, on a :

$$u_{k-1} - u_k = -\frac{1}{k} - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \left[-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right] = \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

On en déduit que : $u_{k-1} - u_k \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2}$.

2 Pour k assez grand, $u_{k-1} - u_k$ et $\frac{1}{2k^2}$ sont donc de même signe, positifs tous les deux.

De plus la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, comme série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

La série $\sum \frac{1}{2k^2}$ converge donc aussi.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum (u_{k-1} - u_k)$ converge.

3 Notons S sa somme : $S = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} (u_{k-1} - u_k) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} (u_{k-1} - u_k)$.

Or par télescopage : $\sum\limits_{k=2}^{n} (u_{k-1} - u_k) = u_1 - u_n = 1 - u_n$.

Il vient : $u_n = 1 - \sum\limits_{k=2}^{n} (u_{k-1} - u_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - \sum\limits_{k=2}^{+\infty} (u_{k-1} - u_k) = 1 - S \in \mathbb{R}$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge.

92.1

$x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ est généralisée en sa borne $+\infty$.

Soit $A \geqslant 1$. On pose :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \ln(x) & \rightsquigarrow & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} & \rightsquigarrow & v(x) = -\frac{1}{x} \end{array}$$

u et v étant de classe C^1 sur $[1, A]$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \int_1^A \ln(x) \times \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\ln(x) \times \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x} \times \left(-\frac{1}{x}\right)\,dx$$

Il vient :

$$\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(A)}{A} + \int_1^A \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(A)}{A} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1$$

Par croissances comparées, on a alors : $\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$.

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$ converge, et on a : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = 1$.

$x \mapsto \frac{1}{2+x^2}$ étant continue sur $]-\infty, 0]$, $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2+x^2}\,dx$ est généralisée en sa borne $-\infty$.

Soit $A \leqslant 0$. On écrit : $\int_A^0 \frac{1}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_A^0 \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_A^0 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx$.

On reconnaît la forme « $\frac{u'}{1+u^2}$ » avec $u(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ et $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi :

$$\int_A^0 \frac{1}{2+x^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_A^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \operatorname{Arctan}\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)$$

Il vient : $\int_A^0 \frac{1}{2+x^2}\,dx \xrightarrow[A \to -\infty]{} -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

On en déduit que $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2+x^2}\,dx$ converge, et on a : $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2+x^2}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

$x \mapsto \frac{x}{(2x+1)^2}$ étant continue sur $[0, +\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx$ est généralisée en sa borne $+\infty$.

Soit $A \geqslant 0$. On calcule $\int_0^A \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx$ à l'aide du changement de variable $t = 2x+1$:

— On exprime l'ancienne variable x en fonction de la nouvelle variable t.
On a : $x = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$.

— On calcule la dérivée de x par rapport à t, donnée par : $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$. Ainsi : $dx = \frac{1}{2}\,dt$.

— Nouvelles bornes : $x = 0$ donne $t = 0 + 1 = 1$, et $x = A$ donne $t = 2A + 1$.

En effectuant le changement de variable, on obtient :

$$\int_0^A \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx = \int_1^{2A+1} \frac{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}}{t^2} \times \left(\frac{1}{2}\,dt\right)$$

Par linéarité de l'intégration, on a :

$$\int_0^A \frac{x}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^{2A+1} \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{4}\int_1^{2A+1} \left(-\frac{1}{t^2}\right)\,dt$$

On sait calculer ces nouvelles intégrales :

$$\int_0^A \frac{x}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(2A+1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2A+1} - 1\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ diverge.

93.1

$t \mapsto \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{t}$ est continue sur $]0,1]$, donc $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{t}\,dt$ est généralisée en sa borne 0.

On a : $\sqrt{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$, donc : $\frac{e^{\sqrt{t}}-1}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}$.

De plus : $\forall t \in]0,1]$, $\frac{e^{\sqrt{t}}-1}{t} \geqslant 0$ et $\frac{1}{t^{1/2}} \geqslant 0$.

Enfin on sait que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,dt$ converge, car $\frac{1}{2} < 1$.

Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{t}\,dt$ converge.

$t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ est généralisée en sa borne $+\infty$.

La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ n'étant pas positive pour t au voisinage de $+\infty$, on étudie d'abord la convergence absolue de l'intégrale.

Or : $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant |\cos(t)| \leqslant 1$, donc : $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant \frac{|\cos(t)|}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$.

Autrement dit : $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$.

Enfin on sait que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, car $2 > 1$.

Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| dt$ converge.

Étant absolument convergente, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ est convergente.

95.1

1 Soit $i \in \mathbb{N}$. On a : $L_i = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{i,k}$.

Le jeton ne pouvant être sur plusieurs cases simultanément, les $A_{i,k}$ sont 2 à 2 incompatibles et on a :

$$P(L_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{i,k}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e\,2^{k+1}\,i!} = \frac{1}{2e\,i!}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2e\,i!} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} =$$

en reconnaissant une série géométrique.

2 Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $C_k = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_{i,k}$, et comme les $A_{i,k}$ sont 2 à 2 incompatibles, il vient :

$$P(C_k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_{i,k}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e\,2^{k+1}\,i!} = \frac{1}{e\,2^{k+1}}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1^i}{i!} = \frac{1}{e\,2^{k+1}} \times e^1 =$$

en reconnaissant une série exponentielle.

3 On a : $D = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_{i,i}$, et comme les $A_{i,i}$ sont 2 à 2 incompatibles, il vient :

$$P(D) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_{i,i}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e\,2^{i+1}\,i!} = \frac{1}{2e}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i}{i!} = \frac{1}{2e} \times e^{1/2} =$$

en reconnaissant à nouveau une série exponentielle.

95.2

1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît un schéma de Bernoulli.
Épreuve : Lancer une fois la pièce.
Succès : Obtenir Pile. On a : $P(\text{« Succès »}) = \frac{1}{2}$.
X_k donne le nombre de succès obtenus au cours de k épreuves identiques et indépendantes (car des lancers successifs d'une même pièce peuvent être supposés indépendants).

Ainsi X_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(k, \frac{1}{2}\right)$ et on a :

$$\forall i \in [\![0,k]\!],\ P(X_k = i) = \binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k-i} = \binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement A_k est réalisé si et seulement si le joueur n'a obtenu aucun Pile lors des k premiers lancers.
Ainsi $A_k = [X_k = 0]$ et on a : $P(A_k) = P(X_k = 0) = \binom{k}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

3 De même l'événement B_k est réalisé si et seulement si le joueur a obtenu exactement un Pile lors des k premiers lancers.
Ainsi $B_k = [X_k = 1]$ et on a : $P(B_k) = P(X_k = 1) = \binom{k}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = k\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

4 **a.** Soit $k \geqslant 2$. L'événement R_k est réalisé si et seulement si le joueur a obtenu 2 Piles ou plus lors des k premiers lancers. Ainsi :

$$P(R_k) = P(X_k \geqslant 2) = 1 - P(X_k = 0) - P(X_k = 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k - k\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

b. Il faut effectuer au moins deux lancers pour que le joueur finisse ruiné, donc :

$$R = \bigcup_{k=2}^{+\infty} R_k$$

Les R_k ne sont pas 2 à 2 incompatibles. En effet, si le joueur a 0 euro à l'issue du k-ième lancer, alors le joueur a aussi 0 euro à l'issue du $(k+1)$-ième lancer, donc si R_k est réalisé, alors R_{k+1} est aussi réalisé. Ceci se traduit par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad R_k \subset R_{k+1}$$

La suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite croissante d'événements, et il est alors possible d'appliquer le théorème de la limite monotone :

$$P(R) = P\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} R_k\right) = \lim_{k\to+\infty} P(R_k)$$

Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} P(R_k) = \lim_{k\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k - k\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - 0 - 0 = 1$$

On en déduit que $P(R) = 1$, ce qui signifie que le joueur finira presque sûrement ruiné au cours de la série de lancers.

Exercice 97.1

1 On peut obtenir la première boule rouge dès le premier tirage (dans ce cas X prend la valeur 1) ou aussi loin que l'on veut. Ainsi $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
On note B_i : « Le i-ième tirage amène une boule blanche » et R_i : « Le i-ième tirage amène une boule rouge ».
Alors $P(X=1) = P(R_1) = \frac{1}{2}$ et pour $k \geqslant 2$, on a : $[X=k] = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap R_k$.
Il est possible d'obtenir $k-1$ boules blanches de suite, donc $P(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}) \neq 0$ et on peut appliquer la formule des probabilités composées :

$$P(X=k) = P(B_1)\, P_{B_1}(B_2)\, P_{B_1\cap B_2}(B_3) \ldots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\, P_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(R_k)$$

Sachant B_1, il y a $1+1=2$ boules blanches (BB) et 1 boule rouge (BR) dans l'urne.
Sachant $B_1 \cap B_2$, il y a $1+2=3$ BB et 1 BR dans l'urne.
...
Sachant $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2}$, il y a $1+(k-2) = k-1$ BB et 1 BR dans l'urne.
Sachant $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$, il y a $1+(k-1) = k$ BB et 1 BR dans l'urne.
On obtient donc :

$$P(X=k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

en simplifiant les fractions de proche en proche.
On note que la formule générale reste valable pour $k=1$.

2 Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a les équivalences :

$$X \text{ admet une espérance} \iff \sum_{k\geqslant 1} kP(X=k) \text{ converge absolument}$$

$$\iff \sum_{k\geqslant 1} kP(X=k) \text{ converge} \quad \text{(série à termes positifs)}$$

On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}$ (avec $j = k+1$).

Or on sait que la série $\sum \frac{1}{j}$ diverge (série de Riemann de paramètre 1).

On en déduit que la série $\sum kP(X=k)$ diverge, donc X n'admet pas d'espérance.

Exercice 97.2

1 Pour tout $k \geqslant 1$, on a : $p_k = \dfrac{k-1}{k!} \geqslant 0$. De plus par télescopage, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{0!} = 1$$

Donc la série $\sum p_k$ converge et on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

La formule donnée par l'énoncé définit donc bien une loi de probabilité.

2 Comme dans les exemples précédents, on a l'équivalence :

$$X \text{ admet une espérance} \iff \sum_{k\geqslant 1} kP(X=k) \text{ converge}$$

En isolant le terme en $k=1$ puis avec $j = k-2$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = 0 + \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1^j}{j!}$$

Or on sait que la série exponentielle $\sum \dfrac{1^j}{j!}$ converge.

On en déduit que la série $\sum kP(X=k)$ converge.

Ainsi X admet une espérance et on a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1^j}{j!} = e^1 = e$$

3) Il s'agit d'abord d'étudier l'existence du moment d'ordre 2 de X.
Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} & X \text{ admet un moment d'ordre 2} \\ \iff & \sum_{k\geqslant 1} k^2 P(X=k) \text{ converge absolument} \\ \iff & \sum_{k\geqslant 1} k^2 P(X=k) \text{ converge} \qquad \text{(série à termes positifs)} \end{aligned}$$

En isolant le terme en $k=1$ puis avec $j = k-2$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = 0 + \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{j+2}{j!}$$

On poursuit le calcul en isolant le terme en $j=0$ de la première somme :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{j}{j!} + 2\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} = 0 + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{j}{j!} + 2\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{(j-1)!} + 2\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!}$$

En posant $i = j-1$, on a finalement : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{i=0}^{n-3} \frac{1^i}{i!} + 2\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1^j}{j!}$.

Or les séries exponentielles $\sum \frac{1^i}{i!}$ et $\sum \frac{1^j}{j!}$ convergent.

On en déduit que la série $\sum k^2 P(X=k)$ converge.

Ainsi X admet un moment d'ordre 2 et on a :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1^i}{i!} + 2\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1^j}{j!} = e^1 + 2e^1 = 3e$$

On en déduit que X admet une variance, et d'après la formule de Kœnig-Huygens, il vient :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 3e - e^2 = e(3-e)$$

98.1

1 Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} & X \text{ admet un moment d'ordre 2} \\ \iff & \sum_{k\geqslant 0} k^2 P(X=k) \text{ converge absolument} \\ \iff & \sum_{k\geqslant 0} k^2 P(X=k) \text{ converge} \qquad \text{(série à termes positifs)} \end{aligned}$$

Avec l'égalité $k^2 = k(k-1) + k$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) P(X=k) + \sum_{k=0}^{n} k P(X=k)$$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = 0 + pq^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1) q^{k-2} + pq \sum_{k=1}^{n} k q^{k-1}$.

Comme $0 < p < 1$ et $q = 1-p$, on a aussi $0 < q < 1$, donc les séries géométriques dérivées $\sum k q^{k-1}$ et $\sum k(k-1) q^{k-2}$ convergent.

On en déduit que la série $\sum k^2 P(X=k)$ converge.

Ainsi X admet un moment d'ordre 2 et on a :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X=k) = pq^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} + pq \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1}$$

Il vient : $E(X^2) = pq^2 \times \dfrac{2}{(1-q)^3} + pq \times \dfrac{1}{(1-q)^2} = pq^2 \times \dfrac{2}{p^3} + pq \times \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2q^2 + pq}{p^2}$.

2 Ainsi X admet une variance, et d'après la formule de Kœnig-Huygens, on a :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{2q^2 + pq}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2}$$

Comme $p + q = 1$, on a finalement : $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

Exercice 99.1

1 Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y = X + 1$, on a : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

De plus, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k - 1) = pq^{k-1}$.

On en déduit que $Y = X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

2 D'après le cours, Y admet une espérance, de valeur : $E(Y) = \frac{1}{p}$.
Par théorème, $X = Y - 1$ admet alors aussi une espérance et on a :

$$E(X) = E(Y-1) = E(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$$

Toujours d'après le cours, Y admet une variance, de valeur : $V(Y) = \frac{q}{p^2}$.
Par théorème, $X = Y - 1$ admet alors aussi une variance et on a :

$$V(X) = V(Y-1) = 1^2 V(Y) = V(Y) = \frac{q}{p^2}$$

L'utilisation d'une variable aléatoire auxiliaire qui suit une loi usuelle permet ici d'éviter les longs calculs effectués dans les fiches précédentes !

Exercice 99.2

1 On reconnaît un schéma géométrique pour Y_1.
Épreuve : Lancer une fois la pièce 1.
Succès : Obtenir Face. On a : $P(\text{« Succès »}) = \frac{1}{2}$.
Y_1 donne le rang du premier succès lors d'une suite illimitée d'épreuves identiques et indépendantes (car il s'agit de lancers successifs d'une même pièce).
Ainsi Y_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(Y_1 = k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

D'après le cours, Y_1 admet une espérance et une variance, données par :

$$E(Y_1) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{et} \quad V(Y_1) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = 2$$

2 De même $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$ et on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_2 = k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

On obtient alors : $E(Y_2) = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ puis : $V(Y_2) = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

3 Notons pour commencer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et fixons $k \in \mathbb{N}^*$.
L'expérience aléatoire considérée dans cette question se décompose en deux étapes :

1. On choisit l'une des deux pièces au hasard. En notant A_i : « On choisit la pièce i », la famille (A_1, A_2) est un système complet d'événements qui décrit les possibilités pour cette première étape. De plus :

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

2. On effectue une suite illimitée de lancers de la pièce choisie à l'étape précédente.

La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_1, A_2) de probabilités non nulles donne alors :

$$P(X = k) = P(A_1)P_{A_1}(X = k) + P(A_2)P_{A_2}(X = k)$$

Sachant A_1, on lance la pièce 1, donc : $P_{A_1}(X = k) = P(Y_1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

De même : $P_{A_2}(X = k) = P(Y_2 = k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

D'où la loi de X :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(X = k) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Exercice 100.1

L'expérience aléatoire considérée se décompose en deux étapes :

1. La variable aléatoire X prend une certaine valeur. On peut décrire toutes les possibilités pour cette première étape à l'aide du système complet d'événements $\left([X = k]\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$.
2. Si X prend la valeur k, on tire une boule d'une urne contenant k boules blanches et 1 boule rouge. On cherche alors la probabilité de R : « La boule tirée est rouge ».

On remarque que $P(X = 1) = 0$: il faut donc être prudent lorsque l'on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\left([X = k]\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Elle donne tout d'abord :

$$P(R) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left([X = k] \cap R\right) = P\left([X = 1] \cap R\right) + \sum_{k=2}^{+\infty} P\left([X = k] \cap R\right)$$

Comme $P(X = 1) = 0$, on a aussi $P\left([X = 1] \cap R\right) = 0$.
De plus $P(X = k) \neq 0$ si $k \geqslant 2$.
Ainsi :

$$P(R) = 0 + \sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k)P_{[X=k]}(R) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \times \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{(k+1)!}$$

On pose $j = k + 1$ et on peut séparer la somme car les deux séries alors obtenues sont convergentes (séries exponentielles) :

$$P(R) = \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{j-2}{j!} = \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{j}{j!} - 2\sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)!} - 2\sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{j!}$$

Enfin avec $i = j - 1$ dans la première somme, on obtient :

$$P(R) = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i!} - 2\sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1^i}{i!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) - 2\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1^j}{j!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right)$$

Il vient : $P(R) = (e-2) - 2\left(e - \frac{5}{2}\right) = 3 - e$, qui est bien un réel compris entre 0 et 1.

Exercice 100.2

1 Le jeton est sur le sommet A_1 à l'instant 0, donc :

$$P(X_0 = 1) = 1 \quad \text{et} \quad P(X_0 = 2) = P(X_0 = 3) = 0$$

Le jeton a une probabilité $1/2$ de rester sur place et une probabilité $1/4$ de se déplacer vers l'un ou l'autre des deux autres sommets, donc :

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = \frac{1}{4}$$

2 Soit $n \geqslant 0$. On considère l'enchaînement des deux étapes suivantes :

1. On observe la position du jeton à l'instant n : le jeton pouvant être sur chacun des 3 sommets du triangle, $([X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3])$ est un système complet d'événements qui décrit les possibilités pour cette première étape.
2. On observe la position du jeton à l'instant $n+1$, qui dépend de sa position à l'instant précédent.

Le système complet d'événements $([X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3])$ est de probabilités non nulles si $n \geqslant 1$, car à partir de l'instant 1 il est possible que le jeton soit sur n'importe quel sommet. La formule des probabilités totales donne alors :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2)P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) \\ &\quad + P(X_n = 3)P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 1) \end{aligned}$$

Selon le protocole, on a :

$$P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) = P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{4}$$

On obtient ainsi : $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{4} v_n + \frac{1}{4} w_n$.

On observe de plus avec la question 1 que la formule reste valable pour $n = 0$.
Les deux autres relations de récurrence s'établissent de la même manière.

3 Comme $X_n(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n + v_n + w_n = P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) = 1$$

Il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{4}(v_n + w_n) = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{4}(1 - u_n) = \frac{1}{4} u_n + \frac{1}{4}$$

4 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique et $u_0 = 1$.
La méthode vue dans la fiche 36 permet d'obtenir : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

5 On montre de même que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n + \frac{1}{4}$.

Avec $v_0 = 0$, on obtient après calcul : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

De même, on trouve : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = w_n$. Ce résultat était prévisible puisque les sommets 2 et 3 jouent des rôles symétriques dans l'expérience aléatoire considérée, ce qui implique notamment que $P(X_n = 2) = P(X_n = 3)$.

Exercice 104.1

1 • f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 1 (quotient de fonctions continues à dénominateur ne s'annulant pas sur $]1, +\infty[$, fonction constante sur $]-\infty, 1[$).

• f est positive sur $\mathbb{R}$ (car pour $x \geqslant 1$, on a $\ln(x) \geqslant 0$).

• f est nulle sur $]-\infty, 1[$, donc $\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx$ converge et vaut 0.
Soit $A \geqslant 1$. Une intégration par parties puis une limite usuelle type « croissances comparées » (voir la fiche 92 pour le détail) amène :

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1 \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1$$

Ainsi $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.
Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut $0 + 1 = 1$.

On déduit de ce qui précède que f est une densité.

2 La densité f de X est nulle sur $]-\infty, 1[$, donc : $X(\Omega) = [1, +\infty[$.
Si $x < 1$, alors l'événement $[X \leqslant x]$ est impossible et : $F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$.
Si $x \geqslant 1$, on a en reprenant le calcul ci-dessus :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt = 0 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

Pour résumer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Exercice 104.2

1 La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition f est continue sur $\mathbb{R}$.

f est positive sur $\mathbb{R}$ (car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t > 0$).

On remarque que f est paire : il suffit donc d'étudier $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = e^{-2x}$, donc pour $A \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^A e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^A = \frac{e^{-2A}}{-2} - \frac{1}{-2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

La fonction f étant paire, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

On déduit de ce qui précède que f est une densité.

Remarque : pour étudier $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, on aurait aussi pu se ramener à une loi exponentielle. En effet :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

où g désigne une densité associée à la loi exponentielle de paramètre 2 (la fonction g est donc nulle sur $]-\infty, 0[$).

Or on sait d'après le cours que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

2 La densité f de X est non nulle sur $\mathbb{R}$, donc : $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

Si $x \leqslant 0$, alors :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to-\infty}\int_A^x e^{2t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to-\infty}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_A^x$$

Il vient pour $x \leqslant 0$:

$$F_X(x) = \lim_{A\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2A}}{2}\right) = \frac{e^{2x}}{2}$$

On a en particulier : $F_X(0) = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$. Puis pour $x > 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x e^{-2t}\,\mathrm{d}t = F_X(0) + \left(\frac{e^{-2x}}{-2} - \frac{1}{-2}\right)$$

en remarquant que l'intégrale $\int_0^x e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ a déjà été calculée dans la question précédente.

$$F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{e^{-2x}}{2}$$

Pour résumer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \frac{e^{-2x}}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On vérifie bien que F_X tend vers 0 en $-\infty$, vers 1 en $+\infty$ et vers $F_X(0) = \frac{1}{2}$ à gauche et à droite en 0 (ce qui assure la continuité en 0 de la fonction).

Exercice 105.1

1 On a l'équivalence :

$$X \text{ admet une espérance} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge absolument}$$

Or $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $[0,2]$ et nulle en dehors, donc on sait sans calcul que $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument. Ainsi X admet une espérance, donnée par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_0^2 \frac{3x^3}{8}\,\mathrm{d}x + 0 = \frac{3}{8} \times \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{8} \times \frac{16}{4} = \frac{3}{2}$$

2 $xf(x) = 0$ si $x < 1$, donc comme dans l'exemple traité plus haut, on a :

$$X \text{ admet une espérance} \iff \int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

Soit $A \geqslant 1$. On reconnaît la forme « $u' \times u$ » avec $u(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int_1^A xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^A \frac{1}{x} \times \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^A = \frac{(\ln(A))^2}{2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, donc X n'admet pas d'espérance.

3 Comme f est paire, $x \mapsto xf(x)$ est impaire et on a les équivalences :

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge} \quad (\text{car } xf(x) \geqslant 0 \text{ si } x \geqslant 0) \end{aligned}$$

Or $e^{-2|x|} = e^{-2x}$ si $x \geqslant 0$, donc : $\forall x \in [0, +\infty[$, $xf(x) = xe^{-2x}$.

Si Y est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 2, on sait que Y admet une espérance égale à $\frac{1}{2}$.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} 2xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$ converge (et vaut $\frac{1}{2}$).

Le facteur 2 n'ayant pas d'influence sur la nature de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$ converge aussi. Ainsi X admet une espérance.

Enfin comme $x \mapsto xf(x)\,\mathrm{d}x$ est impaire, il vient : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$

EXERCICE 108.1

L'espace vectoriel $E = \mathbb{C}_2[X]$ est de dimension 3.

1 Étant constituée de $4 \neq 3$ vecteurs de E, la famille $\mathcal{B}_1$ n'est pas une base de E (on peut même affirmer qu'elle n'est pas libre car $4 > \dim(E)$).

2 $\mathcal{B}_2$ est une famille de 3 vecteurs de E qui est de dimension 3.
C'est une base si et seulement si elle est libre.
On observe que $(X^2-1)+(X^2+1) = 2X^2$, donc la famille est liée.
$\mathcal{B}_2$ n'est pas une base de E.

3 $\mathcal{B}_3$ est une famille de 3 vecteurs de E qui est de dimension 3.
C'est une base si et seulement si elle est libre.
Tester la liberté de $\mathcal{B}_3$ revient à résoudre le système d'inconnues $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$:

$$\alpha(X^2+1)+\beta(X-2)+3\gamma = 0 \iff \alpha X^2 + \beta X + (\alpha - 2\beta + 3\gamma) = 0$$

Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, ce qui donne :

$$\alpha X^2 + \beta X + \alpha - 2\beta + 3\gamma = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ \alpha - 2\beta + 3\gamma & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $\mathcal{B}_3$ est une famille libre.
On a démontré que $\mathcal{B}_3$ est une base de E.

EXERCICE 111.1 Les ensembles F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ en tant qu'espaces des solutions d'un système linéaire homogène.

1 Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors $X \in F \cap G$ est équivalent au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 0 \\ x - z & = & 0 \\ x + y + t & = & 0 \\ y + 2t & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 0 \\ -2y - z & = & 0 \\ -y + t & = & 0 \\ y + 2t & = & 0 \end{array}\right.$$

En ligne 3 il vient : $y = t$, puis en substituant en dernière ligne on obtient : $3t = 0$, donc : $y = t = 0$. Enfin en substituant en première et deuxième ligne on a : $x = z = 0$.
Ainsi : $X \in F \cap G \iff X = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$.
On en déduit que F et G sont en somme directe.

2 Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors $X \in F \cap H$ est équivalent au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 0 \\ x - z & = & 0 \\ x + y + t & = & 0 \\ y - t & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 0 \\ -2y - z & = & 0 \\ -y + t & = & 0 \\ y - t & = & 0 \end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes sont proportionnelles, on peut supprimer la dernière et exprimer les inconnues x, y et z en fonction de t par substitution :

$$X \in F \cap H \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2t \\ z & = & -2t \\ y & = & t \end{array}\right. \iff X = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \iff X = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En particulier avec $t = 1$ on obtient : $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \cap H$, donc $F \cap H \neq \{0\}$.

F et H ne sont donc pas en somme directe.

EXERCICE 115.1

1 Pour tous $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on calcule avec la définition de Φ :

$$\Phi(\alpha X_1 + \beta X_2) = A(\alpha X_1 + \beta X_2)$$

Puis par distributivité du produit matriciel sur l'addition :

$$\Phi(\alpha X_1 + \beta X_2) = A(\alpha X_1) + A(\beta X_2) = \alpha A X_1 + \beta A X_2 = \alpha\Phi(X_1) + \beta\Phi(X_2)$$

Ainsi Φ est une application linéaire.

2 En reprenant l'application f de l'exemple traité, on a :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Autrement dit en notant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.

D'après la première question, on sait alors que l'application f est linéaire.

On retiendra que toute application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de la forme $X \mapsto AX$ avec A une matrice à n lignes et p colonnes fixée.

[illegible] 15.2

1 Soit $u_1, u_2 \in \mathbb{C}^3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
On note $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et on calcule :

$$\begin{aligned}\alpha u_1 + \beta u_2 &= \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) \\ &= \alpha x_1 + \beta x_2 \,,\, \alpha y_1 + \beta y_2 \,,\, \alpha z_1 + \beta z_2 \,)\end{aligned}$$

Puis avec la définition de g :

$$\begin{aligned}g(\alpha u_1 + \beta u_2) &= \big(\, (\alpha x_1 + \beta x_2) + \mathrm{i}\,(\alpha y_1 + \beta y_2) \,,\, 2\,(\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) \,\big) \\ &= \big(\, \alpha(x_1 + \mathrm{i}y_1) + \beta(x_2 + \mathrm{i}y_2) \,,\, \alpha(2y_1 + z_1) + \beta(2y_2 + z_2) \big)\end{aligned}$$

Et enfin par définition des opérations dans $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}g(\alpha u_1 + \beta u_2) &= \alpha(x_1 + \mathrm{i}y_1, 2y_1 + z_1) + \beta(x_2 + \mathrm{i}y_2, 2y_2 + z_2) \\ &= \alpha g(u_1) + \beta g(u_2)\end{aligned}$$

Ainsi g est une application linéaire.

un

EXERCICE 116.1

1 Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, on a les équivalences :

$$u \in \operatorname{Ker}(g) \iff g(u) = (0,0) \iff (x + \mathrm{i}y, 2y + z) = (0,0)$$

On obtient un système linéaire qui se résout en exprimant x et z en fonction de y :

$$u \in \operatorname{Ker}(g) \iff \begin{cases} x + \mathrm{i}y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\mathrm{i}y \\ y = -2y \end{cases}$$

Finalement : $u \in \operatorname{Ker}(g) \iff u = (-\mathrm{i}y, y, -2y)$, donc :

$$\operatorname{Ker}(g) = \{(-\mathrm{i}y, y, -2y)\,,\ y \in \mathbb{C}\} = \operatorname{Vect}((-\mathrm{i}, 1, -2))$$

La famille $((-\mathrm{i}, 1, -2))$ est libre (car constituée d'un vecteur non nul) et génératrice de $\operatorname{Ker}(g)$, donc c'est une base de $\operatorname{Ker}(g)$.
En particulier $\operatorname{Ker}(g) \neq \{(0,0,0)\}$, donc l'application g n'est pas injective.

2 Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a les équivalences :

$$P \in \operatorname{Ker}(h) \iff h(P) = (0,0,0) \iff (P(0), P(1), P(2)) = (0,0,0)$$

Ainsi P est un polynôme de degré au plus 2 admettant au moins 3 racines distinctes, donc nécessairement P est le polynôme nul.
En notant $0_{\mathbb{R}_2[X]}$ le polynôme nul, on a donc : $P \in \operatorname{Ker}(h) \iff P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.
Ainsi $\operatorname{Ker}(h) = \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$ et l'application h est injective.

On pouvait aussi résoudre l'équation $h(P) = (0,0,0)$ en posant $P = aX^2 + bX + c$:

$$h(P) = (0,0,0) \iff P(0) = P(1) = P(2) = 0 \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Il vient :

$$h(P) = (0,0,0) \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = -a \\ 4a - 2a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \iff P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

On retrouve bien entendu le même résultat qu'avec le raisonnement portant sur le nombre de racines de P effectué précédemment.

EXERCICE 116.2

On note O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a les équivalences :

$$M \in \operatorname{Ker}(p) \iff p(M) = O_n \iff \frac{1}{2}(M + {}^tM) = O_n \iff {}^tM = -M$$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients réels.
On a ainsi démontré que :

$$M \in \operatorname{Ker}(p) \iff M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Ainsi $\operatorname{Ker}(p) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
En particulier la matrice M dont les coefficients sont tous nuls sauf le dernier de la première ligne qui vaut 1 et le premier de la dernière ligne qui vaut -1 est un élément de $\operatorname{Ker}(p)$.
Donc $\operatorname{Ker}(p) \neq \{O_n\}$ et l'application p n'est pas injective.

EXERCICE 117.1

1 La base canonique de $\mathbb{C}^3$ est donnée par : $((1,0,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (0,0,1))$.
On a donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(g) &= \operatorname{Vect}\Big(g((1,0,0))\,,\ g((0,1,0))\,,\ g((0,0,1))\Big) \\ &= \operatorname{Vect}((1,0)\,,\ (\mathrm{i},2)\,,\ (0,1)) \end{aligned}$$

Or $(\mathrm{i}, 2) = \mathrm{i}(1,0) + 2(0,1)$ donc on peut supprimer ce vecteur de la famille génératrice.
On reconnaît alors la base canonique de $\mathbb{C}^2$, donc :

$$\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Vect}((1,0)\,,\ (0,1)) = \mathbb{C}^2$$

L'image de g étant égale à l'espace d'arrivée, on sait que l'application g est surjective.
On sait de plus que l'application g est de rang 2.

2 La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par : $(1, X, X^2)$.
On a donc :

$$\operatorname{Im}(h) = \operatorname{Vect}(h(1)\,,\ h(X)\,,\ h(X^2)) = \operatorname{Vect}((1,1,1)\,,\ (0,1,2)\,,\ (0,1,4))$$

On teste la liberté de la famille génératrice de $\operatorname{Im}(h)$ ainsi obtenue en résolvant le système d'inconnues $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\alpha(1,1,1) + \beta(0,1,2) + \gamma(0,1,4) = (0,0,0) \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

On effectue l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ pour obtenir le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta + \gamma & = & 0 \\ 2\gamma & = & 0 \end{array}\right. \iff \alpha = \gamma = \beta = 0$$

Donc la famille $\big((1,1,1)\,,\,(0,1,2)\,,\,(0,1,4)\big)$ est libre. Étant aussi génératrice de $\mathrm{Im}(h)$, c'est une base de $\mathrm{Im}(h)$.
On en déduit que : $\mathrm{Rg}(h) = \dim\big(\mathrm{Im}(h)\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, où $\mathbb{R}^3$ est l'espace d'arrivée.
Donc h est surjective, et en particulier $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 117.2

1 Soit $N \in \mathrm{Im}(p)$.
Par définition, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $N = p(M) = \dfrac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)$.
On calcule par linéarité de la transposition :

$$^tN = \frac{1}{2}\left({}^tM + {}^t({}^tM)\right) = \frac{1}{2}\left({}^tM + M\right) = N$$

Ainsi $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et ceci étant valable pour toute matrice N de $\mathrm{Im}(p)$, il vient :

$$\mathrm{Im}(p) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

2 Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On calcule :

$$p(M) = \frac{1}{2}\left({}^tM + M\right) = \frac{1}{2}\left(M + M\right) = M$$

Ainsi $M \in \mathrm{Im}(p)$ et ceci étant valable pour toute matrice M de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il vient :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}(p)$$

Par double inclusion, on conclut : $\mathrm{Im}(p) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 122.1

La démarche habituelle permet de prouver que h est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, donc h est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1
- $h(e_1) = h((1,0,0)) = (0,-1,-1) = 0\,e_1 + (-1)\,e_2 + (-1)\,e_3$
- $h(e_2) = h((0,1,0)) = (1,2,1) = 1\,e_1 + 2\,e_2 + 1\,e_3$
- $h(e_3) = h((0,0,1)) = (2,1,3) = 2\,e_1 + 1\,e_2 + 3\,e_3$

La matrice de h dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} h(e_1) & h(e_2) & h(e_3) \end{array} \\ \underset{\mathcal{E}}{\mathrm{mat}}(h) = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

2 La famille $\mathcal{F}$ reste une base de $\mathbb{R}^3$ car obtenue en permutant l'ordre des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$. On a :
- $h(e_3) = h((0,0,1)) = (2,1,3) = 3\,e_3 + 2\,e_1 + 1\,e_2$
- $h(e_1) = h((1,0,0)) = (0,-1,-1) = (-1)\,e_3 + 0\,e_1 + (-1)\,e_2$
- $h(e_2) = h((0,1,0)) = (1,2,1) = 1\,e_3 + 1\,e_1 + 2\,e_2$

La matrice de h dans la base $\mathcal{F} = (e_3, e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} h(e_3) & h(e_1) & h(e_2) \end{array} \\ \underset{\mathcal{F}}{\mathrm{mat}}(h) = & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

3 La famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on l'a démontré dans la fiche 108.
On note dans l'ordre $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3)$ et on calcule :
- $h(x_1) = h((1,1,0)) = (1,1,0) = 1\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3$
- $h(x_2) = h((1,0,1)) = (2,0,2) = 0\,x_1 + 2\,x_2 + 0\,x_3$
- $h(x_3) = h((1,1,1)) = (3,2,3) = (1,0,1) + (2,2,2) = 0\,x_1 + 1\,x_2 + 2\,x_3$

La matrice de h dans la base $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} h(x_1) & h(x_2) & h(x_3) \end{array} \\ \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(h) = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array}$$

Exercice 122.2

On prouve que l'application g est linéaire avec la définition de l'évaluation d'un polynôme en A.

1 La base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
On note $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si bien que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.
On calcule alors :
- $g(1) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{2,2}$
- $g(X) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,2}$
- $g(X^2) = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{1,2} + E_{2,2}$

Ainsi :

$$\begin{array}{c} \\ \underset{\mathcal{E},\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(g) = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(1) & g(X) & g(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \end{array}$$

2 La famille $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ car elle est libre (vérification rapide, le système associé étant triangulaire) constituée de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3. On note dans l'ordre $\mathcal{B}_1 = (P_1, P_2, P_3)$.

La famille $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ car elle est libre (vérification rapide, le système se résolvant directement par substitution) constituée de 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4. On note dans l'ordre $\mathcal{B}_2 = (M_1, M_2, M_3, M_4)$.

On calcule alors :

$$g(P_1) = I_2 = M_1,\ g(P_2) = 2A - I_2 = 2M_2 - M_1,\ g(P_3) = A^2 - 2A + I_2 = O_2$$

Ainsi :

$$\begin{array}{c} \\ \underset{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}{\mathrm{mat}}(g) = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(P_1) & g(P_2) & g(P_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}$$

Exercice 123.1

Le rang de M_1 est donné par la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de M_1.
Le rang de M_1 est au plus 2 car ses colonnes sont des éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, qui est de dimension 2.
Le rang de M_1 est au moins 2 car les deux premières colonnes de M_1 sont non colinéaires, l'espace engendré par les colonnes de M_1 contient donc une famille libre de deux vecteurs.
Finalement : $\mathrm{Rg}(M_1) = 2$.

On a : $\mathrm{Rg}(M_2) = 2$.
En effet, les deux colonnes de M_2 sont non colinéaires, donc elles engendrent un espace de dimension 2.

On calcule :

$$\mathrm{Rg}(M_3) = \mathrm{Rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1 \end{array}$$

Les deux dernières colonnes sont identiques, donc l'espace engendré par les colonnes de M_3 est égal à l'espace engendré par les deux premières colonnes de la dernière matrice obtenue, et il est de dimension 2 (ces 2 colonnes étant non colinéaires).
Finalement : $\mathrm{Rg}(M_3) = 2$.

Exercice 123.2

La matrice A a une colonne nulle. Son rang, qui est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes, est donc au plus 3. Or A étant d'ordre 4, elle est inversible si et seulement si son rang est 4.
Finalement A n'est pas inversible.

La matrice B a toutes ses colonnes égales. Son rang est donc au plus 1 (il est même égal à 1 puisque $B \neq O_3$). Or B étant d'ordre 3, elle est inversible si et seulement si son rang est 3.
Finalement B n'est pas inversible.